



ПЛОСКАЯ и СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІИ

Переведенныя изъ курса Г. Безу

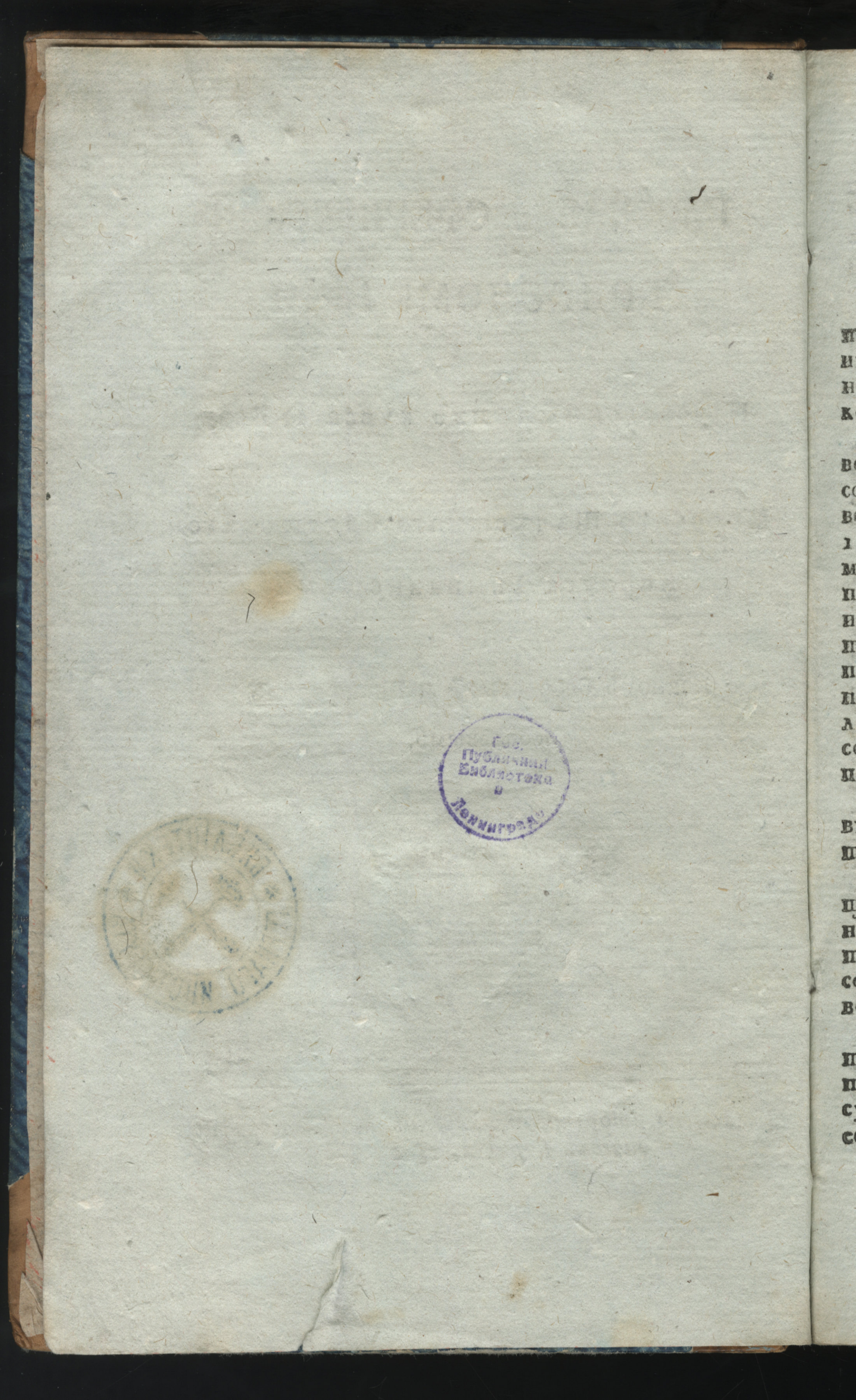
Морскаго Шляхетнаго Кадетскаго Корпуса Гимназистами

Иваномъ Соболевымъ и Никифоромъ Лебедѣвымъ.





Печатаны вторымъ тисненіемъ при Типографіи онагожъ Корпуса, 1800 года.


Гос.
Публичная
Библиотека
в
Ленинграде

О ТРИГОНОМЕТРІИ.

266. Слово тригонометрія значитъ мѣра треугольниковъ. Вообще же разумѣется подъ симъ именемъ наука опредѣлять положенія и измѣренія различныхъ частей протяженія, знавъ нѣкоторыя изъ оныхъ.

Ежели представимъ, что различныя точки воображаемыя въ какомъ нибудь пространствѣ, соединены взаимно прямыми линѣями; то три вещи предлежать будутъ нашему разсужденію: 1 е длина сихъ линѣй; 2 е углы, которые онѣ между собою составляютъ; 3 е углы составляемые плоскостями, на коихъ оныя линѣи самою вещію, или мысленно находятся. Отъ сравненія сихъ трехъ предмѣтовъ зависитъ рѣшеніе всѣхъ вопросовъ, которые можно предложить о измѣреніи протяженія, и частей онаго. Наука же опредѣлять всѣ сіи вещи, знавъ нѣкоторыя изъ оныхъ, состоитъ въ рѣшеніи сихъ двухъ главныхъ вопросовъ:

1 ой. Зная три изъ шести вещей, которыя входятъ въ прямолинѣйный треугольникъ, найти три другія, когда сіе возможно.

2 ой. Зная три изъ шести вещей составляющихъ сферической треугольникъ, (т. е. треугольникъ составленный на поверхности шара изъ трехъ дугъ круга, имѣющихъ центромъ центръ сего же самаго шара) найти три прочія, когда сіе возможно.

Первый вопросъ есть предмѣтъ Тригонометріи, называемой плоскою тригонометріею: послику шесть вещей въ оной разсуждаемыя, суть на одной и той же плоскости. Называютъ ее также тригонометріею прямолинѣйною.

Вторый вопросъ принадлежитъ тригонометрiи сферической. Шесть вещей въ ней разсуждаемыя, суть на различныхъ плоскостяхъ, какъ въ послѣдствiи увидимъ.

О плоской или прямолинѣйной тригонометрiи.

267. Плоская тригонометрiя есть часть Геометрiи, которая научаетъ опредѣлять или вычислять три изъ шести вещей прямолинѣйнаго треугольника, зная три другiя части, когда сiе возможно.

Когда сiе возможно, говорю; ибо естьли бы
Фиг. 140. на прим. извѣстны были только три угла, то не льзя бы было опредѣлить сторонъ. И въ самой вещи, ежели чрезъ точку D, взятую произвольно на сторонѣ AB треугольника ABC, котораго, положимъ, три угла извѣстны, проведена будетъ DE параллельная BC; то будетъ треугольникъ ADE, имѣющiй тѣже углы, какiе и треугольникъ ABC (37). А изъ сего видно, что можно такимъ образомъ составить безчисленное множество другихъ треугольниковъ, кои будутъ имѣть тѣже самые углы. Слѣдовательно вычисленiе должно бы показать вдругъ безчисленное множество различныхъ сторонъ. И такъ вопросъ въ семъ случаѣ есть совершенно неопредѣленный.

Мы увидимъ однакожъ, что ежели не можно опредѣлить величинъ сторонъ, можно по крайней мѣрѣ опредѣлить ихъ содержанiе.

Но когда изъ трехъ извѣстныхъ или данныхъ вещей, будетъ одна сторона, то можно всегда опредѣлить все прочее. Однако есть одинъ случай, въ которомъ остается нѣчто неопредѣлительнымъ; а именно: положимъ, что въ

треугольникѣ АВС извѣстны двѣ стороны АВ и вс, и уголъ А, противулежащій одной изъ сихъ сторонъ: не льзя опредѣлить величины угла С, ниже стороны АС, развѣ зная, острый или тупый сей уголъ С. Въ самомъ дѣлѣ, ежели представить, что точкою В, какъ центромъ, и радіусомъ равнымъ сторонѣ ВС, будетъ описана дуга СD, и ежели отъ D, гдѣ сія дуга встрѣчается съ АС, будетъ проведена ВD; то составится другой треугольникъ АВD, въ которомъ будетъ все то извѣстно, что извѣстно въ треугольникѣ АВС, т. е. уголъ А, сторона АВ и сторона ВD равная ВС; и такъ имѣемъ здѣсь тѣже вещи для опредѣленія угла ВDА, какія были въ треугольникѣ АВС для опредѣленія угла С. фиг. 141.

Но между симъ и предъидущимъ случаемъ находится та разность, что здѣсь можно опредѣлить величину угла С и угла ВDА, какъ мы сіе увидимъ въ послѣдствіи. Остается только неопредѣленнымъ, которую изъ сихъ двухъ величинъ должно принять, и слѣдовательно какой образъ долженъ имѣть треугольникъ. И такъ сверьхъ трехъ данныхъ вещей, должно еще знать, острый или тупый долженъ быть искомый уголъ. Впрочемъ можно замѣтить мимоходомъ, что два угла С и ВDА, о которыхъ разсуждается, суть супплементъ (исполненіе) одинъ другаго; ибо уголъ ВDА есть суппалементъ угла ВDС, который равенъ углу С, понеже треугольникъ ВDС есть равнобедренный.

268. Не самые углы употребляются въ вычисленіи треугольниковъ; полагаются вмѣсто оныхъ линѣи, которыя, хотя имъ и непропорціональны, однако могутъ представлять сіи углы, и притомъ гораздо способнѣе для употребленія въ вычисленіи; ибо, какъ мы ниже сего увидимъ, онѣ пропорціональны сторонамъ треугольниковъ;

прилично убо не простираясь далѣе, показать сіи линѣи, и изъяснить, какъ могутъ онѣ заступить мѣсто угловъ.

О синусахъ, косинусахъ, тангенсахъ, котангенсахъ, секансахъ и косекансахъ.

269. Перпендикуляръ AP опущенный отъ
фиг. 142. края дуги AB на радіусъ BC проходящій чрезъ другой край всея дуги, называется синусъ (синъ) прямой, или просто синусъ дуги AB или угла ACB.

BP Часть радіуса находящаяся между синусомъ и краемъ дуги, называется синусъ версусъ (обращенный синъ).

BD Часть перпендикуляра возставленнаго на концѣ радіуса, заключающаяся между симъ радіусомъ BC и радіусомъ CA продолженнымъ, называется тангенсъ (прикасательная) дуги AB или угла ACB.

Линѣя CD, которая есть радіусъ CA, продолженный до тангенса, называется секансъ (сѣкущая) дуги AB или угла ACB.

Естьли проведенъ будетъ радіусъ CF перпендикулярный къ CB, и при оконечности онаго F перпендикулярная прямая EF, встрѣчающаяся съ продолженнымъ радіусомъ CA на точкѣ E; и ежели наконецъ опущена будетъ на CF перпендикулярная прямая AQ; то слѣдуетъ изъ предъидущихъ опредѣленій, что AQ будетъ синусъ, FQ синусъ версусъ, FE тангенсъ, и CE секансъ дуги AF или угла ACF.

Но какъ уголъ ACF есть комплементъ (дополненіе) угла ACB; ибо сіи два угла составляютъ прямой уголъ; то можно сказать, что AQ есть

синусъ комплемента, FQ синусъ версусъ комплемента, EF тангенсъ комплемента, а CF секансъ комплемента дуги AB или угла ACB.

Дабы сократить сїи наименованїя, согласились называть косинусомъ (косиномъ), синусъ комплемента; косинусомъ версусомъ (сообращеннымъ синомъ), синусъ версусъ комплемента; котангенсомъ (соприкасательною), тангенсъ комплемента; и косекансомъ (сосѣкущею), секансъ комплемента. Почему линѣи AQ, FQ, FE, CE будутъ называемы косинусъ; косинусъ версусъ, котангенсъ и косекансъ дуги AB или угла ACB; также линѣи AP, BP, BD, CD могутъ быть называемы косинусъ, косинусъ версусъ, котангенсъ и косекансъ дуги AF или угла ACF; ибо дуга AB есть комплементъ дуги AF, также какъ AF комплементъ AB.

Для означенїя сихъ линѣй, говоря о какомъ либо углѣ или дугѣ; мы будемъ ставить предъ буквами, означающими сей уголъ или сїю дугу, сокращенныя слова: син. косин. тан. кот. И такъ син. AB будетъ значить синусъ дуги AB; син. ACB будетъ значить синусъ угла ACB; также кос. AB, кос. ACB будутъ значить косинусъ дуги AB, косинусъ угла ACB; а для означенїя радїуса будемъ употреблять букву R.

270. Отсюда явствуетъ, 1 е, что косинусъ AQ какой нибудь дуги AB равенъ части CP радїуса содержимой между центромъ и синусомъ.

2 е. Что синусъ версусъ BP равенъ разности между радїусомъ и косинусомъ.

3 е. Что синусъ какой либо дуги AB есть половина хорды AG двукратной дуги ABG. Ибо радїусъ CB будучи перпендикуляренъ къ хордѣ AG, раздѣляетъ сїю хорду и дугу на двѣ равныя части (52).

271. Изъ сего послѣдняго предложенія слѣдуетъ, что синусъ 30° равенъ половинѣ радїуса; ибо онъ есть половина хорды 60°; или стороны правильнаго шестиугольника въ кругъ вписаннаго, которая, какъ мы видѣли (93), равна радїусу.

272. Тангенсъ 45° равенъ радїусу. Ибо естьли уголъ ACB есть 45°, а уголъ CBD прямый, то уголъ CDB будетъ также равенъ 45°; слѣдовательно треугольникъ CBD будетъ равнобедренный, а посему BD равна CB.

273. По мѣрѣ увеличиванія дуги AB или угла ACB, синусъ ихъ AP увеличивается, а косинусъ AQ или CP уменшается, доколѣ дуга AB сдѣлается 90°; тогда синусъ AP сдѣлается FC, то есть равенъ радїусу, а косинусъ нуль. Поелику, когда точка A падаетъ на F, перпендикуляръ AQ становится нуль.

Въ разсужденїи тангенса BD и котангенса EF, явно, что тангенсъ BD увеличивается безпрестанно, а котангенсъ напротивъ того уменшается; такъ что когда дуга AB 90°, тангенсъ ея безконеченъ, а котангенсъ нуль. И дѣйствительно, чемъ больше становится дуга AB, тѣмъ болѣе точка D возвышается надъ BC, и когда точка A крайне близка къ F, двѣ линѣи CD и BD дѣлаются почти параллельны, и встрѣчаются въ безпредѣльномъ разстоянїи; слѣдовательно BD тогда безконечна; посему она таковою бываетъ, когда точка A падетъ на точку F.

274. Итакъ синусъ дуги 90° равенъ радїусу, косинусъ нуль, тангенсъ безконеченъ, а котангенсъ нуль.

Поелику синусъ 90° есть самый большїй изъ всѣхъ синусовъ, то называютъ его для отличїя отъ другихъ, цѣлымъ синусомъ, такъ что сїи три выраженїя синусъ 90°, радїусъ и цѣлый синусъ значатъ тоже.

275. Когда дуга AB становится больше 90°, синусъ ея AP уменшается, а косинусъ AQ или CP, который падаетъ тогда по другую сторону центра въ разсужденіи точки P, увеличивается дотолѣ, пока дуга AB сдѣлается 180°; тогда синусъ ея нуль, а косинусъ равенъ радїусу. Видно также, что синусъ AP, и косинусъ CP дуги AB или угла ACB, который больше 90°, принадлежатъ и дугѣ AH или углу ACH меншему 90° и суппленту перьваго; такъ что дабы имѣть синусъ и косинусъ тупаго угла, должно взять синусъ и косинусъ его супплемента. Но должно примѣтить, что косинусъ падаетъ со стороны противулежащей той, на которуюбы онъ палъ, естьлибы дуга AB или уголъ ACB былъ меньше 90°. фиг. 143.

Въ разсужденїи тангенса, понеже онъ опредѣляется (269) встрѣчею перпендикуляра BD съ продолженнымъ радїусомъ CA, явствуетъ, что когда дуга AB больше 90°, онъ бываетъ BD; но возставивъ перпендикуляръ HJ, можно видѣть, что треугольникъ CBD равенъ треугольнику CHJ; и что посему BD равна HJ. фиг. 142. фиг. 143.

276. И такъ тангенсъ дуги или угла большаго 90°, есть тотъ же, что и тангенсъ супплемента сея дуги. Вся разность состоитъ въ томъ, что онъ падаетъ ниже радїуса BC. Чтожъ касается до котангенса EF, онъ есть тотъ же что и котангенсъ супплемента, и падаетъ со стороны противулежащей той, на которуюбы онъ палъ, естьлибы дуга AB, или уголъ ACB былъ меньше 90°. Явствуетъ также, что тангенсъ 180° есть нуль, а котангенсъ безконеченъ.

277. Предположивъ сїи понятїя, представимъ, что четверть окружности BF раздѣлена на дуги равныя одной минутѣ, т. е. на 5400 равныхъ фиг. 144.

частей, и что отъ каждой точки раздѣленія опущены перпендикулярныя прямыя, или синусы, какъ AP на радіусъ BC; представимъ также, что сей радіусъ BC раздѣленъ на весьма многія равныя части, на 100000; на примѣръ: каждая изъ перпендикулярныхъ прямыхъ будетъ содержать нѣкоторое число сихъ частей радіуса: и такъ естьли бы можно было какимъ нибудь образомъ опредѣлить число частей каждаго изъ сихъ перпендикуляровъ, то явствуетъ, что сіи линѣи могли бы послужить къ опредѣленію величины угловъ, такъ что естьли бы написавъ по порядку въ одномъ столбцѣ всѣ минуты, начиная отъ нуля до 90°, написано было въ другомъ столбцѣ на сторонѣ и насупротивъ каждой минуты, число частей соотвѣтствующаго перпендикуляра; можно бы было помощію сей таблицы узнать число градусовъ угла, коего число частей перпендикуляра или синуса извѣстно; и обратно, зная число градусовъ и частей градуса угла, можно бы было узнать число частей его синуса. Сія таблица имѣла бы таковую пользу не только для всѣхъ дугъ или угловъ, коихъ радіусъ имѣлъ бы тоже число частей, что и тотъ, на который сочинена таблица, но еще и для всякой другой дуги или угла имѣющаго
фиг. 144. извѣстный радіусъ; на примѣръ да будетъ уголъ DCG имѣющій сторону или радіусъ CD 8 футъ, а перпендикуляръ DE въ 3 фута; да будетъ CA радіусъ, по которому вычислены таблицы. Ежели представить дугу AB и перпендикуляръ AP, то сей перпендикуляръ будетъ синусъ таблицъ; и такъ я удобно могу найти, изъ коликихъ частей состоитъ сія перпендикулярная прямая. Ибо какъ треугольники CDE, CAP подобны, (понеже DE и AP суть параллельны); то будетъ (109) CD : DE :: CA : AP, т. е. 8ф : 3ф :: 100000 : AP; и

такъ я найду (Ариѳ. 179), что AP равна 37500; слѣдовательно остается мнѣ сыскать сіе число въ таблицѣ между синусами, гдѣ напротивъ его увижу число градусовъ и минутъ угла DCG или DCE.

Обратно, ежели бы дано было число градусовъ и минутъ угла DCG и его радіусъ CD, можно бы также опредѣлить величину перпендикулярной DE; понеже, зная число градусовъ и минутъ сего угла, можно найти въ таблицѣ и число частей перпендикуляра или синуса AP, соотвѣтствующаго сему числу градусовъ; и тогда по свойству подобныхъ треугольниковъ CAP, CDE, будетъ сія пропорція CA : AP :: CD : DE, по коей удобно вычислить DE, ибо три первые члена CA, AP и CD извѣстны, а именно CA и AP изъ таблицъ, а CD дана въ футахъ.

Отсюда явствуетъ, что синусы суть тѣ линѣи, кои, какъ мы выше (268) сказали, могутъ замѣнять углы въ вычисленіи треугольниковъ.

278. Но не одни только синусы къ сему употребляются: въ употребленіи также тангенсы и секансы. Сіи линѣи легко вычислить можно, когда уже одиножды вычислены всѣ синусы. Ибо изъ подобныхъ треугольниковъ CPA, CBD можно взять слѣдующія пропорціи: фиг. 142.

CP : PA :: CB : BD,
и CP : CA :: CB : CD,
то есть (ибо CP равна AQ)
кос. AB : син. AB :: R : тан. AB
и кос. AB : R :: R : сек. AB.

Въ каждой изъ сихъ пропорцій три первые члена извѣстны, когда извѣстны всѣ синусы; понеже косинусъ какой либо дуги не что иное есть, какъ синусъ комплемента сея дуги: и такъ удобно сыщется (Ариѳ. 179) четвертой членъ

каждой пропорціи, то есть тангенсы и секансы, а посему также котангенсы и коссекансы, которые суть тангенсы и секансы комплементовъ.

279. Впрочемъ двѣ послѣднія пропорціи, которыя мы теперь показали, не только для вычисленія тангенсовъ и секансовъ полезны, но весьма употребительны и во многихъ другихъ случаяхъ, какъ мы увидимъ въ продолженіи; и такъ должно старатся затвердить ихъ. Вторая на примѣръ заключаетъ слѣдующее свойство, на которомъ основано сочиненіе правыхъ картъ: подобно, какъ мы доказали, что кос. AB : R :: R : сек. AB, можно доказать въ разсужденіи всякой другой дуги BO, что кос. BO : R :: R : сек. BO. Сіи двѣ пропорціи, имѣя средніе члены тѣже, должны имѣть произведенія крайнихъ ихъ членовъ равныя (Ариѳ. 178); слѣдовательно можно (Ариѳ. 180) составить изъ крайнихъ членовъ той и другой новую пропорцію, которая будетъ имѣть крайними членами крайніе члены одной, а средними крайніе другой, такъ что будетъ кос. AB : кос. BO :: сек. BO : сек. AB. Откуду можно заключить, что косинусы двухъ дугъ суть въ обратномъ содержаніи ихъ секансовъ.

280. Вотъ еще другая пропорція полезная во многихъ случаяхъ, изъ которой также можно вывести, что тангенсы двухъ дугъ суть въ обратномъ содержаніи ихъ котангенсовъ: треугольники CBD, CFE суть подобные, ибо, сверхъ прямаго угла при точкѣ B и при точкѣ F, уголъ DCB равенъ углу CEF, поелику CB и EF суть параллельныя; по чему будетъ BD : CB :: CF : FE, т. е. тан. AB : R :: R : кот. AB. Можно доказать подобнымъ образомъ, что тан. BO : R :: R : кот. BO; чего ради тан. AB : тан. BO :: кот. BO : кот. AB.

Книги, заключающїя величины всѣхъ упомянутыхъ линѣй, называются шаблицы синусовъ: онѣ содержатъ обыкновенно не токмо числительныя величины всѣхъ сихъ линѣй, но и логариѳмы ихъ, которые употребляются всегда, когда возможно, вмѣсто числительныхъ величинъ. Сїижъ самыя шаблицы заключаютъ логариѳмы натуральныхъ чиселъ, которыя мы показали въ Ариѳметикѣ.

Прежде нежели покажемъ употребленїе сихъ шаблицъ для рѣшенїя треугольниковъ, остается намъ поговоришь о составленїи ихъ: т. е. о способѣ, по которому вычислены, или можно вычислишь синусы, и проч. Мы тѣмъ охотнѣе къ сему приступимъ, что предложенїя, которыя мы имѣемъ показать на сей предлогъ, и на другїе намъ послужатъ.

281. Дабы найти косинусъ дуги, которой синусъ извѣстенъ, должно отнять квадратъ синуса отъ квадрата радїуса, и извлечь квадратный корень изъ остатка. Ибо косинусъ AQ равенъ прямой PC, которая есть одна изъ сторонъ при прямомъ углѣ въ прямоугольникѣ треугольникѣ APC, коего ипотенуза AC и сторона AP въ семъ случаѣ извѣстны (166). фиг. 142.

И такъ естьли бы потребно было найти косинусъ 30°; то, какъ мы видѣли (271), что синусъ 30° есть половина радїуса, которой мы положимъ здѣсь изъ 100000 частей, сей синусъ былъ бы 50000; отнявъ его квадратъ 2500000000 отъ 10000000000 квадрата радїуса, остается 7500000000, коего квадратный корень 86603 есть косинусъ 30° или синусъ 60°.

282. Дабы, зная синусъ дуги AB, найти синусъ половины ея, надлежитъ вопервыхъ вычислить косинусъ сей первой дуги, и отнять

его отъ радїуса, что покажетъ синусъ версусъ вр; потомъ взявъ квадратъ изъ вр, сложить оный съ квадратомъ синуса ар; сумма (166) будетъ квадратъ хорды ав; извлекши квадратный корень изъ сей суммы будетъ найдена ав, которой половина есть вј синусъ дуги вd половины ав (270).

283. Зная синусъ вј дуги вd; дабы найти синусъ ар дуги аdв, которая есть двукратна сей дуги, должно вычислить косинусъ сј дуги вd, и сдѣлать сїю пропорцїю, R : кос. вd :: 2 син. вd : син. аdв, въ которой, поелику первые три члена извѣстны въ семъ случаѣ, четвертый легко вычисленїемъ найдется.

Сїя пропорцїя основана на томъ, что два треугольника свј и вар суть подобны: понеже, сверьхъ прямаго угла въ р и въ ј они имѣютъ еще уголъ в общїй. И такъ св : сј :: ав : ар, но сј (270) есть косинусъ дуги вd, а ав двукратная вј, есть синусъ дуги вd; ар синусъ дуги аdв; и св радїусъ; чего ради R : кос. вd :: 2 син. dв : син. аdв.

Фиг. 146. 284. Дабы, зная синусы двухъ дугъ ав, ас, найти синусъ ихъ суммы, или ихъ разности, должно, вычисливъ (281) косинусы сихъ самыхъ дугъ, умножить синусъ первыя на косинусъ вторыя, и синусъ вторыя на косинусъ первыя. Сумма сихъ двухъ произведенїй, раздѣленная на радїусъ, будетъ синусъ суммы сихъ дугъ. Разность же сихъ самыхъ произведенїй, раздѣленная на радїусъ, будетъ синусъ разности сихъ двухъ дугъ.

Сдѣлай дугу аd равную дугѣ ас, проведи хорду сd и радїусъ lа, который раздѣлитъ сїю хорду по поламъ на точкѣ ј; отъ точекъ с, а, ј и d опусти перпендикулярныя ск, аg, јн, df на вl; наконецъ отъ точекъ ј и d проведи јм и dn

параллельныя прямой BL. Понеже CD раздѣлена по поламъ на точкѣ J, то и CN будетъ также разсѣчена по поламъ на точкѣ M (102). Примѣтимъ, что CR, которая есть синусъ дуги BC, суммы двухъ дугъ, состоитъ изъ KM и MC, или изъ JH и MC, DF, которая есть синусъ дуги BD, разности двухъ дугъ, равна прямой KN, сія же равна прямой KM безъ MN, т. е. JH безъ CM. И такъ, чтобъ найти синусъ суммы, должно сложить величину прямой JH съ величиною прямой MC; а чтобы найти синусъ разности, надлежитъ отнять сію отъ оной.

Подобные треугольники LAG, LJH даютъ LA : LJ : : AG : JH, т. е. R : кос. AC : : син. AB : JH. Слѣдовательно (Ариѳ. 179) JH равна $\frac{\text{син. AB} \times \text{кос. AC}}{R}$.

Подобные же треугольники LAG и CJM (ибо по сочиненію имѣютъ стороны взаимно перпендикулярныя) даютъ (112) LA : LG : : CJ : MC, или R : кос. AB : : син. AC : MC. Слѣдовательно MC равна $\frac{\text{син. AC} \times \text{кос. AB}}{R}$; чего ради должно сложить $\frac{\text{син. AC} \times \text{кос. AB}}{R}$ съ $\frac{\text{син. AB} \times \text{кос. AC}}{R}$, дабы найти синусъ суммы; и напротивъ того отнять первое количество отъ втораго, что бы получить синусъ разности.

285. Дабы найти косинусъ суммы или разности двухъ дугъ, которыхъ извѣстны синусы, надлежитъ, вычисливъ (281) косинусы каждой изъ оныхъ, умножить ихъ взаимно; и также умножить оба синуса; потомъ отнять второе произведеніе отъ перьваго, и раздѣля остатокъ на радіусъ, будемъ имѣть косинусъ суммы двухъ дугъ. Напротивъ, чтобъ найти косинусъ разности, надлежитъ сложить два произведенія, и сумму ихъ раздѣлить на радіусъ.

Ибо, поелику DC разсѣчена по поламъ въ точкѣ J, FK будетъ также разсѣчена по поламъ въ точкѣ H; слѣдовательно прямая LK, косинусъ суммы, равна прямой LH безъ HK, или LH безъ JM; а LF косинусъ разности равна LH вмѣстѣ съ HF, или LH съ HK, или наконецъ LH съ JM. Посмотримъ же какія суть величины прямыхъ LH и JM.

Въ подобныхъ треугольникахъ LGA, LHJ имѣемъ LA : LJ : : LG : LH. т. е. R : кос. AC : : кос. AB : LH; слѣдовательно LH равна $\frac{\text{кос. AC} \times \text{кос. AB}}{R}$

Подобные треугольники LAG, CJM даютъ LA : AG : : CJ : JM, то есть R : син. AB : : син. AC : JM; слѣдовательно JM равна $\frac{\text{син. AB} \times \text{син. AC}}{R}$; и такъ, чтобы найти косинусъ суммы, должно отнять $\frac{\text{син. AB} \times \text{син. AC}}{R}$ отъ $\frac{\text{кос. AB} \times \text{кос. AC}}{R}$; напротивъ же того должно сіи количества сложить, чтобы найти косинусъ разности.

фиг. 147. 286. Сумма синусовъ двухъ дугъ AB, AC, содержится къ разности сихъ синусовъ, такъ какъ тангенсъ полусуммы сихъ двухъ дугъ, содержится къ тангенсу ихъ полуразности; то есть, син. AB + син. AC : син. AB — син. AC : : тан. $\frac{AB + AC}{2}$: тан. $\frac{AB - AC}{2}$

Проведя діаметръ AM, опиши дугу AD равную дугѣ AB; и соединя хорду BD, которая будетъ перпендикулярна къ AM, чрезъ точку C проведи CP перпендикулярную, и CF параллельную прямой AM; отъ точки F проведи хорды FB и FD, и радіусомъ FG равнымъ радіусу круга BAD, опиши дугу JGK, встрѣчающую CF на точкѣ G, и отъ сей точки G возставь прямую HL перпендикулярную къ CF; линѣи GH и GL суть тангенсы угловъ

GEH и GFL или угловъ CFB и CFD, кои имѣя свои вершины на окружности, измѣряются половинами дугъ CB, CD, на которыхъ они стоятъ (63), т. е. половиною разности BC, и половиною суммы CD двухъ дугъ AB, AC. И такъ GL и GH суть тангенсы полусуммы и полуразности сихъ самыхъ дугъ.

Положивъ сїе, явствуетъ, что, послику DS равна BS, будетъ DE = BS + SE или BS + CP, т. е. равна суммѣ синусовъ дугъ AB, AC: также BE = BS — ES или BS — CP, т. е. равна разности синусовъ сихъ же самыхъ дугъ. Но понеже BD и HL суть параллельны, имѣемъ (115) DE : BE :: LG : GH; чего ради син. AB + син. AC : син. AB — син. AC :: тан. $\frac{AB + AC}{2}$: тан. $\frac{AB - AC}{2}$.

287. Отсюда явствуетъ, что сумма косинусовъ двухъ дугъ, содержится къ разности сихъ косинусовъ, такъ какъ котангенсъ полусуммы сихъ дугъ, къ тангенсу полуразности ихъ.

Ибо: понеже косинусы суть синусы комплементовъ, слѣдуетъ изъ предъидущей пропорцїи, что сумма косинусовъ содержится къ ихъ разности, такъ какъ тангенсъ полусуммы комплементовъ, къ тангенсу полуразности сихъ комплементовъ. Но полусумма комплементовъ двухъ дугъ есть комплементъ полусуммы, а полуразность комплементовъ есть тоже, что и полуразность дугъ; слѣдовательно. и проч.

288. Предложенныя три начала (271, 282, 284) достаточны подать свѣденїе о сочиненїи таблицы синусовъ. Въ самомъ дѣлѣ, зная синусъ 30° по помянутымъ способамъ, (271 и 282) можно найти синусъ 15°, и постепенно синусы 7°. 30′; 3°. 45′; 1°. 52′. 30″; 0°. 56′. 15″; 0°. 28′. 7″. 30‴; 0°. 14′. 3″. 45‴; 0°. 7′. 1″. 52‴. 30ⁱᵛ.

Положивъ сїе, должно замѣтить, что весьма малыя дуги нечувствительно разнствуютъ отъ своихъ синусовъ, слѣдовательно они почти пропорцїональны симъ синусамъ; и такъ, чтобъ найти синусъ 1', должно послать сїю пропорцїю: дуга 0°. 7'. 1''. 52'''. 30^{IV} содержится къ дугѣ 0°, 1', такъ какъ синусъ первой дуги, къ синусу дуги 1'.

Ежели въ семъ вычисленїи радїусъ полагается изъ 100000 частей только, то надлежитъ вычислить синусы упомянутыхъ дугъ съ тремя десятичными, дабы можно было оттуда заключить о послѣдующихъ, не ошибаясь болѣе, какъ единицею; послѣ чего удобно будетъ приступить къ другимъ такимъ образомъ:

Начиная отъ 1' до 3°, 0', довольно будетъ умножать синусъ 1' послѣдовательно на 2, 3, 4, 5 и проч. дабы имѣть синусы 2', 3', и проч. не ошибаясь болѣе, какъ единицею.

Дабы вычислить синусы дугъ большихъ 3°, 0'; должно прибѣгнуть къ тому, что сказано (284); но много сократится работа, естьли по сему началу вычислить синусы отъ градусовъ до градусовъ только. Чтожъ касается до минутъ, можно сему удовлетворить, взявъ разность синусовъ двухъ послѣдственныхъ градусовъ, и сдѣлавъ сїю пропорцїю: 60' содержатся къ числу искомыхъ минутъ, такъ какъ разность синусовъ двухъ ближайшихъ градусовъ къ четвертому числу, которое приложивъ къ меньшему изъ двухъ синусовъ, найдется синусъ числа градусовъ и минутъ искомыхъ. На прим. сыскавъ, что синусы 8° и 9° суть 13917 и 15643, естьли бы я пожелалъ найти синусъ 8°, 17', то взялъ бы разность 1726 сихъ синусовъ, и вычислилъ четвертый членъ пропорцїи, коея три первые члена суть 60' : 17' : : 1726:

Сей четвертый членЪ, который найдется почти 489, будучи приложенЪ кЪ 13917, получаемЪ 14406 для синуса 8°. 17′, такЪ какЪ онЪ есть вЪ таблицахЪ, ошибаясь развѢ единицею.

Причина сей пропорцїи основывается на томЪ, что когда дуга KL мала, какЪ на прим. вЪ 1°; то разности LM, JU синусовЪ LF, JH почти пропорцїональны разностямЪ KL, KJ соотвѢтствующихЪ дугЪ AL, AJ; ибо треугольники KML, KUJ, которые можно почесть за прямолинѢйные, суть подобны. фиг. 129.

289. Сей способЪ долженЪ быть употребляемЪ только до 87°. Ибо преступивЪ сей предѢлЪ не можно принять iu за разность синусовЪ PB, QX; понеже количество UX сколь ни мало имѢетЪ чувствительное содержанїе кЪ iu, и тѢмЪ большее, чѣмЪ ближе дуга AB кЪ 90°. ВЪ семЪ случаѢ должно припомнить, что (170) линѢи DE, Dt, которыя суть разности радїуса и синусовЪ PB, QX, пропорцїональны квадратамЪ хордЪ DB и DX, или (понеже дуги DB и DX весьма малы) квадратамЪ дугЪ DB и DX; чего ради вычисливЪ синусЪ 87°, должно взять разность между имЪ и радїусомЪ 100000; и для сысканїя синуса всякой другой дуги между 87° и 90°, должно послать сїю пропорцїю: квадратЪ 3° или 180′ содержится кЪ квадрату числа минутЪ комплемента искомой дуги, такЪ какЪ разность между радїусомЪ и синусомЪ 87° кЪ четвертому члену, который будетЪ Dt, и который отнявЪ отЪ радїуса, получимЪ Ct или QX синусЪ искомой дуги. На примѢрЪ, сыскавЪ, что синусЪ 87° есть 99863, естьли я пожелаю имѢть синусЪ дуги 88°. 24′, которой комплементЪ есть 1°. 36′ или 96′; то сдѢлаю сїю пропорцїю: $\overline{180'}^2 : \overline{96''}^2 :: 137 : Dt$, по которой найду, что Dt фиг. 148.

составляетъ почти 39; отнявъ же отъ радїуса 100000, получу 99961 для синуса 88°. 24′, такъ какъ онъ и дѣйствительно стоитъ въ таблицахъ.

290. Вычисливъ такимъ образомъ синусы, можно легко найти тангенсы и секансы, какъ о томъ сказано (278).

291. Вычисливъ синусы, должно вычислить ихъ логариѳмы, такъ же какъ вычисляютъ логариѳмы чиселъ. Однако примѣтимъ, что естьли бы взята была изъ таблицъ числительная величина одного изъ синусовъ, ради вычисленїя логариѳма его по правилу показанному (Ариѳ. 239), то сысканной логариѳмъ не былъ бы точно тотъ, которой находится въ таблицѣ логариѳмовъ синусовъ. Ибо синусы таблицъ вычислены были перьвоначально, полагая радїусъ изъ 10000000000 частей; но какъ обыкновенныя вычисленїя не требуютъ такой точности, то отняли въ настоящихъ таблицахъ 5 послѣднихъ знаковъ отъ числительныхъ величинъ синусовъ, тангенсовъ и проч. такъ что сїи величины, каковы онѣ дѣйствительно находятся въ таблицахъ, суть только приближенныя; но погрѣшность не простирается далѣе единицы на 100000. Чтоже принадлежитъ до логариѳмовъ синусовъ, тангенсовъ и пр. то оставили ихъ таковыми, каковы они были вычислены для радїуса состоящаго изъ 10000000000 частей; и для сей то причины характеристика ихъ больше нежели какую полагаетъ числительная величина соотвѣтствующаго синуса или соотвѣтствующаго тангенса; такъ что когда употребляются логариѳмы синусовъ, тангенсовъ и проч. тогда полагаемъ, что радїусъ состоитъ изъ 10000000000 частей; когда же употребляются числительныя величины синусовъ и тангенсовъ, принимаемъ радїусъ изъ 100000 частей только.

Что касается до логариѳмовъ тангенсовъ и секансовъ, оныя находятся помощію простаго сложенія и вычитанія, когда уже найдены логариѳмы синусовъ. Сіе слѣдуетъ изъ того, что сказано (278) и (Ариѳ. 232).

292. Хотя обыкновенныя таблицы показываютъ синусы, тангенсы и проч. только для градусовъ и минутъ; однако можно по имъ найти величины сихъ самыхъ линѣй для градусовъ, минутъ и секундъ, слѣдуя точно тому, что мы показали касательно однихъ градусовъ и минутъ. Но какъ чаще употребляются логариѳмы сихъ линѣй вмѣсто самыхъ линѣй, то мы остановимся нѣсколько на семъ послѣднемъ предметѣ.

Положивъ, что имѣемъ логариѳмы синусовъ и тангенсовъ на каждую минуту; когда потребуется найти логариѳмъ синуса какого либо извѣстнаго числа градусовъ, минутъ и секундъ, должно взять логариѳмъ синуса числа градусовъ и минутъ; должно также взять разность двухъ ближайшихъ логариѳмовъ, которая напечатана на сторонѣ; (ежели же въ таблицахъ логариѳмовъ не напечатаны логариѳмическія разности, то можно ихъ находить, вычитая меньшей логариѳмъ изъ большаго къ сму ближайшаго); и потомъ сдѣлать сію пропорцію: 60″ содержатся къ данному числу секундъ, такъ какъ разность логариѳмовъ взятая въ таблицахъ къ четвертому члену, который приложивъ къ логариѳму синуса градусовъ и минутъ, получимъ логариѳмъ синуса даннаго числа градусовъ, минутъ и секундъ.

Естьлибъ, напротивъ того, данъ былъ логариѳмъ синуса несоотвѣтствующій точному числу градусовъ и минутъ; то, дабы найти секунды, надлежало бы составить сію пропорцію: разность двухъ логариѳмовъ, между коими на-

ходится данный логариѳмъ, содержится къ разности сего логариѳма, и логариѳма, который его меньше и ближайшій къ ему въ таблицѣ, такъ какъ 60″ къ четвертому члену; сей членъ покажетъ число секундъ, которыя должно приложить къ числу градусовъ и минутъ дуги находящейся въ таблицѣ, непосредственно меньше искомой.

Должно слѣдовать сему правилу, доколѣ дуга не меньше 3°; когда же она будетъ меньше, тогда можно поступить такъ какъ въ семъ примѣрѣ. Положимъ, что требуется синусъ 1°, 55′, 48″; должно сдѣлать сїю пропорцїю: 1°, 55′ : 1°, 55′, 48″ : : синусъ 1°, 55′ къ четвертому члену, который (ибо малыя дуги пропорцїональны ихъ синусамъ) будетъ безъ чувствительной погрѣшности синусъ 1°, 55′, 48″. Для удобнѣйшаго вычисленїя должно привесть два первые члена въ секунды; потомъ взявъ въ таблицѣ логариѳмъ синуса 1°, 55′, который есть третїй членъ, должно къ нему приложить логариѳмъ 1°, 55′, 48″ приведенныхъ въ секунды; наконецъ отъ суммы отнять логариѳмъ 1°, 55′ приведенныхъ въ секунды; остатокъ будетъ (Ариѳ. 232) логариѳмъ четвертаго члена, то есть логариѳмъ искомый.

Обратно, чтобъ найти число градусовъ, минутъ и секундъ дуги меньшей 3°, и которой данъ синусъ, надлежитъ прїискать въ таблицахъ число градусовъ и минутъ; потомъ составить сїю пропорцїю: синусъ прїисканнаго числа градусовъ и минутъ содержится къ данному синусу, такъ какъ сїе число градусовъ и минутъ приведенныхъ въ секунды, къ цѣлому числу секундъ искомой дуги. И такъ по логариѳмамъ дѣйствїе будетъ приведено къ тому, чтобъ взять разность между логариѳмомъ

предлагаемаго синуса, и логариѳмомъ синуса числа градусовъ и минутъ, который непосредственно меньше даннаго, и придать сію разность къ логариѳму сего числа градусовъ и минутъ приведенныхъ въ секунды; сумма будетъ логариѳмъ числа секундъ, которымъ равна искомая дуга. На примѣръ, ежели данъ будетъ 8, 6233427 логариѳмъ синуса дуги; я вопервыхъ нахожу въ таблицахъ, что самое ближайшее число есть 2°, 24′, и что разность между логариѳмами предлагаемаго синуса и синуса сей послѣдней дуги есть 0, 0013811; потомъ складываю сію разность съ 3, 9365137 логариѳмомъ 2°, 24′ приведенныхъ въ секунды, сумма 3, 9378948 соотвѣтствуетъ въ таблицахъ логариѳмовъ числу 8667, которое являетъ число секундъ искомой дуги; посему искомая дуга будетъ 2°, 24′, 27″. Сіе правило есть обратное предъидущаго.

Что принадлежитъ до логариѳмовъ тангенсовъ, должно слѣдовать тѣмъ же правиламъ, перемѣняя слово синусъ на тангенсъ; надлежитъ только исключить дуги находящіяся между 87° и 90°, для коихъ прилагаемъ слѣдующее правило. Вычисли логариѳмъ тангенса комплемента по предписанному правилу для тангенсовъ, и отними сей логариѳмъ отъ двукратнаго логариѳма радіуса. Дѣйствительно въ силу сказаннаго (280) тангенсъ есть четвертый членъ пропорціи, коея первые три члена суть, котангенсъ, радіусъ и радіусъ. Естьли бы напротивъ того данъ былъ логариѳмъ тангенса дуги, которая находясь между 87° и 90° долженствовала бы имѣть секунды; то отнявъ сей логариѳмъ отъ двукратнаго логариѳма радіуса, имѣли бы логариѳмъ тангенса комплемента дуги, которая, поелику необходимо находится между 0° и 3°,

удобно бы была опредѣлена изъ предъидущаго; взявъ же комплементъ дуги тако найденной, получили бы и искомую дугу.

293. Понеже синусъ дуги есть половина хорды двукратныя дуги, то естьли бы по предложенному началу (282) дошли до синуса дуги самой ближайшей въ 1', и удвоивъ сей синусъ, потомъ увеличили его во столько кратъ, сколько дуга стягаемая хордою равною двукратному синусу содержится къ полуокружности, явствуетъ, что было бы найдено число весьма близкое къ длинѣ полуокружности, но нѣсколько меньшее; естьли бы также по данной пропорціи (278) вычислили тангенсъ той же дуги, и удвоивъ его увеличили потомъ во столько кратъ, сколько двукратная сей дуги содержится къ полуокружности; то получили бы число крайне близкое къ полуокружности, но нѣсколько большее; и такъ помощію вычисленія синусовъ можно близко дойти до содержанія діаметра къ окружности. Мы не остановимся на семъ вычисленіи, ибо въ другомъ мѣстѣ дадимъ исправнѣйшій способъ. Какъ бы ни было, можно найти симъ образомъ, что, когда радіусъ положимъ 1000000000, полуокружности будетъ между 3141592536 и 3141592535. Отсюда заключимъ, что когда радіусъ 1, то 180° полуокружности равны 3, 141592535; градусъ равенъ 0.0174532952; минута равна 0,0002908882о8; и такъ далѣе. Мы приводимъ сіи числа здѣсь для того, что они часто могутъ быть полезны. На примѣръ, желательно ли знать, какое пространство занимаетъ минута градуса на октанѣ, которымъ наблюдаютъ высоты на морѣ, когда радіусъ сего октана полагается 20 дюймовъ. По строенію сего инструмента дуга 45° представляетъ 90°; и такъ разстояніе

между двумя послѣдственными дѣленїями есть пространство занимаемое градусомъ, въ кругѣ котораго радїусъ вдвое меньше, то есть 10 дюймовъ; чего ради минута на такомъ инструментѣ соотвѣтствуетъ только пространству, которое бы она занимала на окружности имѣющей радїусъ въ 10 дюймовъ или 120 линѣй. Умножимъ 120 на 0, 00029 величину минуты, и взявъ только пять первыхъ знаковъ, будемъ имѣть 0, 03480 или 0, 0348, т. е. $\frac{348}{1000}$ линѣи, или около $\frac{1}{29}$ линѣи. Отсюда явствуетъ, что нельзя отвѣчать за минуту, наблюдая симъ инструментомъ. Мы будемъ имѣть случай говорить о семъ въ другомъ мѣстѣ.

О рѣшенїи прямоугольныхъ треугольниковъ.

294. Мы выше сего сказали (267), что для вычисленїя или рѣшенїя треугольника, надлежитъ знать три изъ шести вещей, которыя составляютъ оный, и что между тремя извѣстными частями, должна быть по крайней мѣрѣ одна сторона. Понеже прямый уголъ есть извѣстный уголъ, то довольно въ прямоугольномъ треугольникѣ знать двѣ вещи, кромѣ прямаго угла. изъ которыхъ должна быть по крайней мѣрѣ одна сторона. Примѣтимъ еще, что поелику два острые угла прямоугольнаго треугольника равны купно одному прямому углу, то когда одинъ изъ нихъ извѣстенъ, извѣстенъ и другой.

Рѣшенїе прямоугольныхъ треугольниковъ заключаетъ четыре случая: или двѣ извѣстныя вещи, суть одинъ изъ двухъ острыхъ угловъ, и одна сторона около прямаго угла; или одинъ острый уголъ и ипотенуза; или одна сторона

около прямаго угла и ипотенуза; или наконецъ двѣ стороны около прямаго угла. Сіи четыре случая всегда найдутъ свое рѣшеніе въ одной изъ двухъ слѣдующихъ пропорцій.

295. 1 я. Радіусъ таблицъ, содержится къ синусу одного изъ острыхъ угловъ, такъ какъ ипотенуза, къ сторонѣ противулежащей сему углу.

296. 2 я. Радіусъ таблицъ, содержится къ тангенсу одного изъ острыхъ угловъ, такъ какъ сторона около прямаго угла, прилежащая сему углу, къ сторонѣ ему противулежащей.

Для доказательства первой изъ сихъ двухъ
фиг. 144. пропорцій должно только представить, что въ прямоугольномъ треугольникѣ CED, CA часть ипотенузы есть радіусъ таблицъ; потомъ проведя дугу AB, перпендикуляръ AP будетъ синусъ угла ACB или DCE; и такъ, понеже AP и DE параллельны, будетъ въ подобныхъ треугольникахъ CAP и CDE, CA:AP::CD:DE, то есть R: син. DCE::CD:DE, что и составляетъ первую пропорцію.

Такимъ же образомъ докажется, что R: син. CDE::CD:CE.

Что принадлежитъ до второй пропорціи,
фиг. 149. должно представить въ прямоугольномъ треугольникѣ CEF, что часть CA стороны CE, есть радіусъ таблицъ; тогда написавъ дугу AB, перпендикуляръ AD воставленной изъ точки A на AC, будетъ тангенсъ угла C или FCE; и такъ въ подобныхъ треугольникахъ CAD, CEF, будетъ CA : AD :: CE:EF, то есть R: тан. FCE::CE: EF, что составляетъ вторую изъ двухъ помянутыхъ пропорцій.

Подобно докажется, что R: тан. CFE:: EF:EC.

297. Въ слѣдующихъ приложенїяхъ мы всегда будемъ употреблять логариѳмы синусовъ, тангенсовъ и проч. вмѣсто самыхъ синусовъ, тангенсовъ и проч. и чтобъ приучить начинающихъ къ употребленїю ариѳметическихъ дополненїй, мы употребимъ оныя во всѣхъ вычисленїяхъ, выключая тѣ случаи, въ которыхъ логариѳмъ вычитаемый есть логариѳмъ радїуса, который вычитать легко, ибо характеристика его 10. Но прежде нежели приступимъ къ вычисленїю треугольниковъ, дадимъ здѣсь краткое понятїе о ариѳметическихъ дополненїяхъ, и покажемъ ихъ употребленїе.

Ариѳметическое дополненїе какого либо числа берется, вычитая изъ 9ти каждую цифру сего числа, выключая послѣднюю на правой рукѣ, которая вычитается изъ десяти. И такъ ариѳметическое дополненїе какого нибудь числа можетъ быть взято глядя только на его цифры.

Ариѳметическїя дополненїя служатъ къ обращенїю вычитанїй въ сложенїя. И такъ ежели отъ 78549 я желаю отнять 65647, то могу вмѣсто сего дѣйствїя сложить 78549 съ 34353, что есть ариѳметическое дополненїе числа 65647; потомъ остается только отъ суммы на первомъ мѣстѣ съ лѣвой руки отнять единицу; а ежели бы приложены были два ариѳметическїя дополненїя, должно бы отнять двѣ единицы, и такъ далѣе. Въ семъ случаѣ сумма будетъ 112902, отъ которой отнявъ единицу на первомъ мѣстѣ остается 12902; сей остатокъ есть точно тотъ же, который произойдетъ, естьли изъ 78549 вычесть 65647 по обыкновенному правилу.

Причину сего удобно видѣть можно замѣтя, что ариѳметическое дополненїе числа 65647

не что иное есть, какъ 100000 безъ 65647; и такъ прилагая ариѳметическое дополненіе прилагается 100000 и вычитается 65647; почему выводъ содержитъ 100000 лишку, то есть перьвая его цифра единицею больше.

И понеже (Ариѳ. 232), дабы помощію логариѳмъ сдѣлать тройное правило, должно сложить логариѳмы двухъ среднихъ, и вычесть логариѳмъ перьваго члена; можно по силѣ предъидущаго замѣчанія, взять сумму логариѳмовъ двухъ среднихъ и ариѳметическаго дополненія логариѳма перьваго члена; и потомъ перьвую цифру съ лѣвой руки того, что выдетъ, уменьшать единицею.

Обратимся теперь къ приложенію двухъ доказанныхъ пропорцій къ четыремъ случаямъ, о которыхъ мы сказали.

Примѣръ 1. Положимъ, что надобно опредѣлить высоту AC какого либо зданія, мѣрами взятыми на землѣ.

фиг. 150. Должно отойти отъ сего зданія на разстояніе CD такое, чтобъ уголъ заключающійся между двумя линѣями мысленно проведенными отъ точки D къ основанію и къ вершинѣ зданія, не былъ ни весьма острый, ниже весьма близкій къ 90°. Измѣривъ разстояніе CD, должно утвердить въ точкѣ D ножку графометра, и уставить сей инструментъ такъ, чтобъ плоскость его была вертикальна и направлена къ оси AC башни, а неподвижный діаметръ HF былъ бы горизонталенъ; что можно сдѣлать помощію малой тяжести повѣшенной на нить прикрѣпленную къ центру. Сія нить должна тогда касать край инструмента и соотвѣтствовать 90°. Потомъ движимый діаметръ должно двигать, доколѣ сквозь мишени его

будетъ видна А вершина зданія; тогда должно смотрѣть на инструментѣ число градусовъ угла FEG, которое есть тоже, что и угла AEB противулежащаго ему накрестъ.

Положивъ сіе, послику AC высота зданія перпендикулярна къ горизонту, будетъ она перпендикулярна и къ BE; чего ради есть прямоугольный треугольникъ ABE, въ которомъ, сверхъ прямаго угла, извѣстны сторона BE равная измѣренной CD, и уголъ AEB; а ищется AB; и такъ видно, что три извѣстныя вещи, и искомая суть члены пропорціи (296); почему, дабы найти AB, должно составить сію пропорцію: R: тан. AEB :: BE: AB. Положимъ на примѣръ, что разстояніе CD или BE найдено 132 фута, а уголъ AEB 48°. 54'. будетъ R: тан. 48°. 54' :: 132 ф: AB; и такъ взявъ въ таблицахъ величину тангенса 48°, 54', умножа его на 132, и раздѣля потомъ на радіусъ взятый въ таблицахъ, найдется число футъ въ AB, къ которой приложа ED высоту инструмента, получимъ искомую высоту AC.

Но много сократится вычисленіе, употребя вмѣсто сихъ чиселъ логариѳмы ихъ; ибо тогда должно только (Ариѳ. 232) сложить логариѳмы втораго и третьяго членовъ, и вычесть логариѳмъ перьваго; чего ради вычисленіе произойдетъ слѣдующимъ образомъ:

Логар. тан. 48°. 54' - - - -	10. 0593064
Логар. 132 - - - - - -	2. 1205739
Сумма - - - - - - -	12. 1798803
Логар. R. - - - - - - -	10. 0000000
Остатокъ или логар. AB - - -	2. 1798803,

который соотвѣтствуетъ въ таблицахъ 151. 32 съ погрѣшностію развѣ на одну сотую. И такъ AB есть 151 футъ и 32 сотыхъ, или 151 футъ 3 дюйма, 10 линѣй.

Замѣтивъ мимоходомъ, что, поелику логариѳмъ радїуса имѣетъ характеристику 10, и нули вмѣсто другихъ его цифръ, можно, когда надобно сложить оный или вычесть, не писать его; но только прибавить или убавить единицу отъ десятковъ характеристики логариѳма, съ которымъ сложить, или изъ котораго вычесть его должно.

фиг. 151. Примѣръ II. Отъ извѣстной точки A перешли 32 мили по линѣи AB параллельной GF, которая означаетъ нордъ-нордъ-остъ: спрашивается, сколько подались къ осту, и сколько къ норду.

Должно мысленно провести чрезъ точки A и B двѣ линѣи AC и BC паралельныя, первую линѣи норда и зюйда NS, а вторую линѣи оста и веста O.W. Понеже сїи линѣи составляютъ прямой уголъ, то треугольникъ ACB будетъ прямоугольный въ точкѣ C; извѣстна въ семъ треугольникѣ сторона AB равная 32 милямъ, и уголъ CAB, который ради параллельныхъ прямыхъ равенъ углу NDF содержащему (ибо DF означаетъ нордъ-нордъ-остъ) 22°, 30′ или четверть 90°.

И такъ BC найдется изъ сей пропорцїи (295) R: син. 22°. 30′ :: 32 м: BC. А чтобъ найти AC, примѣтимъ, что уголъ B есть комплементъ угла A; чего ради возмемъ сїю пропорцїю (295), R : син. 67°. 30′ :: 32 мили : AC.

Сїи двѣ пропорцїи должно вычислять по логариѳмамъ слѣдующимъ образомъ:

логар. син. 22° 30′ - - - - -	9. 5828397
логар. 32 - - - - - -	1. 5051500
сумма - - - - - - -	11. 0879897.
логар. R. - - - - - -	1., ...
остатокъ или логар. BC - - -	1, 0879897,

который соотвѣтствуетъ 12. 25 съ погрѣшностїю развѣ на одну сотую.

логар. син. 67°. 30' - - - - 9. 9656153
логар. 32. - - - - - - 1. 5051500

сумма - - - - - - 11, 4707653
логар. R - - - - - - 1., ...

остатокъ или логар. AC - - 1. 4707653, который соотвѣтствуетъ 29, 56 съ погрѣшностію развѣ на одну сотую.

И такъ подались на 12 миль и 25 сотыхъ или $\frac{1}{4}$ къ осту, и на 29 миль и 56 сотыхъ къ норду.

Число пройденныхъ миль по обѣимъ симъ направленіямъ, служитъ къ опредѣленію мѣста B на поверхности моря, гдѣ находится корабль перешедъ AB; но число миль пройденныхъ къ осту требуетъ поправки, о которой здѣсь говорить невмѣстно; ибо мы здѣсь разсуждаемъ только о первыхъ употребленіяхъ Тригонометріи.

Примѣръ III. Перешли 42 мили по линѣи AB, которой положеніе неизвѣстно; знаемъ только, что подались на 35 миль къ норду: спрашивается, какое было направленіе пути AB, то есть по какому румбу слѣдовали.

Въ семъ случаѣ извѣстны сторона AC около прямаго угла, и ипотенуза; требуется найти уголъ CAB. Понеже два угла A и B составляютъ купно прямый уголъ, то узнаемъ уголъ A, есть-ли опредѣлимъ уголъ B. А дабы найти сей уголъ, должно послать пропорцію (295) R : син. B : : AB : AC. то есть, R : син. B : : 42 : 35; или лучше, написавъ второе содержаніе на мѣсто перьваго, 42 : 35 : : R : син. B.

Вычисляя по логариѳмамъ имѣемъ:

логар. 35. - - - - 1. 5440680
логар. радіуса - - - 1., ...
ариѳм. дополненіе лог. 42 - 8. 3767507.

сумма или логар. син. угла B 19, 9208187,

который въ таблицахъ соотвѣтствуетъ 56°, 17′. И такъ уголъ A, или направленіе румба есть 33°, 33′.

Примѣръ IV. Перешли по линѣи AB, которой положеніе и величина неизвѣстны: извѣстно только, что подались на 15 миль къ осту и на 35 миль къ норду; вопрошается о направленіи и длинѣ пути.

И такъ даны здѣсь двѣ стороны AC и BC около прямаго угла; требуются углы и ипотенуза. Дабы найти уголъ A, должно составить сію пропорцію (296) AC: BC :: R: тан. A. т. е. 35: 15 :: R: тан. A.

Вычисляя по логариѳмамъ:

логар. 15 - - - - - - 1. 1760913
логар. R - - - - - - 1., ...
ариѳм. дополненіе логар. 35 - 8. 4559320

сумма или логар. тан. A - - 19. 6320233; который въ таблицѣ соотвѣтствуетъ 23°, 12′.

Когда уже опредѣленъ уголъ A, то для сысканія AB можно поступить такъже какъ и въ III. примѣрѣ; но не нужно вычислять уголъ A, предложеніе доказанное (164 и 166) для сего довлѣетъ. И такъ взявъ квадратъ 15, который есть 225, и сложивъ его съ 1225, квадратомъ 35, найдешь 1450 для квадрата изъ AB; извлекши же квадратный корень будешь имѣть 38, 08 величину AB, съ погрѣшностію развѣ на одну сотую.

Для той же причины, естьли даны ипотенуза AB и одна изъ сторонъ AC около прямаго угла, а требуется сыскать другую сторону BC, нѣтъ нужды вычислять уголъ A; надлежитъ только вычесть (166) квадратъ извѣстной стороны AC изъ квадрата ипотенузы AB; квадратный корень изъ остатка покажетъ величину стороны BC.

Подобнымъ рѣшенїемъ прямоугольныхъ треугольниковъ можно опредѣлить, чего недостаетъ, чтобъ лучъ AD, по которому видимъ горизонтъ моря, когда зритель возвышенъ на извѣстное количество AB, выше точки B его поверхности, былъ параллеленъ поверьхности моря. фиг. 152.

Понеже лучъ зрѣнїя AD есть въ семъ случаѣ прикасательная прямая, то, ежели мысленно проведенъ будетъ радїусъ CD, уголъ D будетъ прямый (48); извѣстенъ же радїусъ CD земли, который содержитъ 19611500 футъ; и естьли къ радїусу CB 19611500 футъ приложена будетъ высота AB, то сыщется сторона AC. И такъ извѣстны будутъ двѣ вещи сверьхъ прямаго угла, почему можно будетъ вычислить уголъ CAD, коего разность DAO съ прямымъ угломъ будетъ пониженїе луча AD ниже луча AO, параллельнаго поверьхности моря при точкѣ B.

Естьли въ томъ же треугольникѣ ADC вычислена будетъ сторона AD, то сыщется дальнѣйшее разстоянїе, на которое зрѣнїе можетъ простиратся, когда глазъ находится на высотѣ AB; но какъ обыкновенныя таблицы не могутъ показать угла CAD и стороны AD съ довольною точностїю, когда AB есть весьма малое количество въ разсужденїи радїуса земли; то вотъ какимъ образомъ можно дополнить сей недостатокъ:

Вообразимъ, что AC продолжена до точки E на окружности; и такъ AE будетъ сѣкущая, а AD касательная, чего ради (129) будетъ AE:AD::AD:AB. И такъ для сысканїя AD должно взять (Ариѳм. 178) среднюю пропорцїональную между AE и AB.

На примѣрь, есть ли бы глазъ возвышенъ былъ отъ поверьхности моря на 20 футъ, то AB была бы 20 футъ, а AE двукратная 19611500 футъ вмѣстѣ съ 20, то есть 39223020 футъ; квадратъ изъ AD былъ бы 39223020 × 20 или 784460400; слѣдовательно (Ариѳм. 178 и 139) AD была бы 28008 футъ, то есть что глазъ возвышенный на 20 футъ отъ поверьхности морской можетъ видѣть на 28008 футъ или на одну лигу и $\frac{2}{3}$ вокругъ.

Теперь, дабы узнать на сколько лучъ зрѣнія AD понизился въ разсужденіи горизонтальнаго AO, примѣтимъ, что, послику AB крайне мала, линѣя AD непримѣтно разнствуетъ отъ дуги BD; и такъ дуга BD есть 28008 футъ. Но какъ радіусъ равенъ 19611500 футъ, то легко найдется (152), что окружность равна 123222688; и слѣдовательно (153) сыскано будетъ число градусовъ дуги BD по сей пропорціи: 123222688 : 28008 : : 360° къ четвертому члену, который будетъ 0°. 4′. 54″; чего ради уголъ ACD, а посему и DAO есть 0°. 4′. 54″, когда AB 20 футъ.

О рѣшеніи косоугольныхъ треугольниковъ.

298. Слово косоугольные треугольники употребляется для означенія вообще треугольниковъ не имѣющихъ прямаго угла.

299. Во всякомъ прямолинѣйномъ треугольникѣ, синусъ одного угла, содержится къ сторонѣ противулежащей сему углу, такъ какъ синусъ всякаго другаго угла тогожъ треугольника, къ сторонѣ ему противулежащей.

фиг. 153. Ибо ежели представить кругъ описанный около треугольника ABC, и проведя радіусы DA,

DB, DC, описать радїусомъ Db, равнымъ радїусу таблицъ, кругъ abc; наконецъ провести хорды ab, bc, ac, соединяющїя точки сѣченїя a, b, c; то удобно можно видѣть, что треугольникъ abc подобенъ треугольнику ABC; ибо линѣи Da, Db будучи равны, суть пропорцїональны линѣямъ DA, DB; и такъ ab (105) параллельна AB. Подобно докажется, что bc параллельна BC, и ac параллельна AC; слѣдовательно (111) AB : : ab : : BC : bc; или AB : $\frac{1}{2}$ ab : : BC : $\frac{1}{2}$ bc; но половина хорды ab есть (270) синусъ ai половины дуги ahb; сїяжъ половина дуги ahb есть мѣра угла acb имѣющаго вершину свою на окружности, и равнаго углу ACB; и такъ $\frac{1}{2}$ ab есть синусъ угла ACB. Подобно докажется, что и $\frac{1}{2}$ bc есть синусъ угла BAC; чего ради AB : син. ACB : : BC : син. BAC.

300. Сїя пропорцїя служитъ къ рѣшенїю треугольника: 1е, когда извѣстны въ немъ два угла и одна сторона; 2е, когда извѣстны двѣ стороны и одинъ уголъ, противулежащїй которой нибудь изъ сихъ сторонъ.

Случай 1. Ежели извѣстны уголъ B, уголъ C и сторона BC, то сыщется и уголъ A, сложивъ два угла B и C, и вычтя ихъ сумму изъ 180°; а что бы найти двѣ стороны AC и AB, должно послать двѣ слѣдующїя пропорцїи: фиг. 65.

син. A : BC : : син. B : AC

син. A : BC : : син. C : AB

Симъ-то образомъ можно вычисленїемъ рѣшить вопросъ, который мы разсматривали (121). На прим. ежели уголъ B примѣченъ 78°. 57′, уголъ C 47°. 34′, а сторона BC 184 фута; то будетъ уголъ A 53°. 29′. Остальныя же двѣ стороны найдутся по симъ двумъ пропорцїямъ:

син. 53°. 29′ : 184 : : син. 78°. 57′ : AC.

син. 53°. 29′ : 184 : : син. 47°. 34′ : AB.

Дѣлая по логариѳмамъ слѣдующимъ образомъ:

логар. 184 - - - - - -	2.	2648178
логар. син. 78°. 57′ - - - -	9.	9918727
ариѳ. дополненіе лог. син. 53°. 29′	0.	0949148
сумма или лог. АС - - - - -	X2.	3516053
логар. 184 - - - - - -	2.	2648178
лог. син. 47°. 34′ - - - - -	9.	8680934
ариѳ дополненіе лог. син. 53°. 29′	0.	0949148
сумма или логар. АВ - - - -	X2.	2278260

найдется АС 224. 7 ф, а АВ 169 ф.

Фиг. 141. Случай II. Ежели извѣстны сторона АВ, сторона ВС и уголъ А, то можно опредѣлить уголъ С, вычисливъ его синусъ сею пропорціею:

ВС : син. А : : АВ : син. С.

Но примѣтимъ, сходственно тому, что мы сказали прежде (267), что нельзя опредѣлить угла С, развѣ извѣстно, острый или тупый онъ быть долженъ.

На примѣръ, да будетъ АВ 68 футъ, ВС 37 футъ, а уголъ А 32°, 28′, пропорція будетъ 37: син. 32°. 28′ : : 68 : син. С.

Найдется, что сей синусъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ 80°. 36′; но какъ синусъ угла принадлежитъ также и супплементу его, то неизвѣстно, 80°. 36′, или супплементъ его 99°. 24′ взять должно; но когда извѣстно, что уголъ искомый долженъ быть острый, то несомнѣнно въ семъ случаѣ онъ равенъ 80°. 36′, и треугольникъ имѣетъ фигуру АВС: естьли же напротивъ того уголъ долженъ быть тупый, то онъ равенъ 99°. 24′, и треугольникъ получитъ фигуру АВD.

Прежде нежели покажемъ два предложенія, дающія рѣшенія треугольниковъ въ другихъ случаяхъ, прилично помѣстить здѣсь предложеніе нужное для доказательства сихъ двухъ предложеній.

301. Ежели извѣстны сумма и разность двухъ количествъ, то придавъ полуразность къ полусуммѣ, будемъ имѣть большее количество; а напротивъ того, отнявъ полуразность отъ полусуммы, получимъ меньшее.

На примѣръ, ежели я знаю, что два количества купно составляютъ 57, и что разнствуютъ оныя 17; то заключаю изъ сего, что сїи два количества суть 37 и 20; приложивъ съ одной стороны половину 17 къ половинѣ 57, а съ другой отнявъ половину 17 отъ половины 57.

Въ самомъ дѣлѣ, послику сумма содержитъ большее и мéньшее количество, естьли къ сей суммѣ придать разность, то произойдетъ двукратное большаго; и такъ бóльшее количество равно половинѣ всего сего, то есть полусуммѣ двухъ количествъ съ полуразностїю ихъ.

Напротивъ того, естьли отъ суммы отнять разность, останется двукратное мéньшаго; и такъ мéньшее количество равно полуостатку, то есть полусуммѣ безъ полуразности.

302. Во всякомъ прямолинѣйномъ треугольникѣ авс, ежели отъ одного изъ угловъ опущена будетъ перпендикулярная прямая на противулежащую сторону, то всегда будетъ сїя пропорцїя: сторона ас, на которую, или на продолженїе которой падаетъ перпендикуляръ, содержится къ суммѣ ав+вс двухъ прочихъ сторонъ, такъ, какъ разность ав—вс сихъ самыхъ сторонъ, къ разности отсѣковъ аd и dс или къ суммѣ ихъ, судя по тому, какъ перпендикуляръ падаетъ, внутрь, или внѣ треугольника. фиг. 154. и 155.

Точкою в, какъ центромъ и радїусомъ вс, опиши окружность сенf, и продолжи сторону фиг. 154. и 155.

AB, пока встрѣтится съ сею окружностiю на точкѣ E. И такъ AE и AC суть двѣ сѣкущiя, проведенныя отъ одной точки взятой внѣ круга; чего ради въ силу того, что сказано (127), будетъ сiя пропорцiя: AC:AE::AG:AF: но AE равна AB+BE или AB+BC; AG равна AB-BG, или AB-BC; а AF (фиг. 154) равна AD-DF или (52) AD-DC; слѣдовательно AC:AB+BC::AB-BC:AD-DC. Въ фигурѣ 155, AF равна AD+DF, или AD+DC; и такъ въ семъ случаѣ AC:AB+BC::AB-BC: AD+DC.

303. Посему, когда извѣстны три стороны треугольника, можно помощiю сего предложенiя сыскать отсѣки сдѣланные перпендикулярною прямою, проведенною отъ одного изъ угловъ на сопротивную сторону. Ибо въ такомъ случаѣ извѣстна (фиг. 154) сумма AC сихъ отсѣковъ, и показанная пропорцiя даетъ ихъ разность; поелику три первые члена сея пропорцiи извѣстны: слѣдовательно знаемъ будетъ каждый изъ отсѣковъ по (301). Въ фигурѣ 155 извѣстна разность отсѣковъ AD и CD, которая есть самая сторона AC, а пропорцiя опредѣляетъ величину ихъ суммы.

304 Теперь легко можемъ рѣшить сей вопросъ: опредѣлить углы треугольника, зная всѣ три его стороны. Должно провести перпендикуляръ отъ одного изъ угловъ; отъ чего составятся два треугольника ADB и CDB. Потомъ вычислить по предъидущей пропорцiи одинъ изъ отсѣковъ, на примѣръ CD; тогда въ прямоугольномъ треугольникѣ CDB, зная двѣ стороны BC и CD сверьхъ прямаго угла, удобно будетъ вычислить уголъ C по (295).

Примѣръ. Сторона AB дана 142 фута, сторона BC 64 фута, а сторона AC 184 фута; требуется сыскать уголъ C,

Вычисляю разность двухъ отсѣковъ AD и DC по сей пропорцiи: 184 : 142 + 64 :: 142 — 64 : AD — DC, или 184 : 206 :: 78 : AD — DC, которую нахожу 87, 32; и такъ (301) меньшiй отсѣкъ CD равенъ половинѣ 184 безъ половины 87, 32, т. е. равенъ 48, 34.

Потомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ CDB ищу уголъ CBD, который будучи сысканъ, покажетъ уголъ C. А чтобъ найти уголъ CBD, составлю сiю пропорцiю: (295) BC : CD :: R : син. CBD, то есть 64 : 48, 34 :: R : син. CBD.

Дѣлая по логариѳмамъ:

логар. 48, 34 - - - - -	1, 6843066
логар. радiуса - - - - -	1., ...
ариѳ. дополненiе логар. 64 - -	8, 1938200
сумма или лог. син. CBD - - -	9, 8781266,

которой соотвѣтствуетъ въ таблицахъ 49°, 03′; слѣдовательно уголъ C будетъ 40°, 57′.

Можно рѣшить сей случай по другому правилу, которое мы здѣсь безъ доказательства покажемъ.

Отъ полусуммы трехъ сторонъ отними каждую изъ двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ; отъ чего произойдутъ два остатка. Потомъ сдѣлай сiю пропорцiю:

Произведенiе двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ, къ произведенiю двухъ остатковъ, такъ какъ квадратъ радiуса къ квадрату синуса половины искомаго угла. Логариѳмами же вычисляй такимъ образомъ:

Къ двукратному логариѳму радiуса приложи логариѳмы двухъ остатковъ, и отъ всего отними сумму логариѳмовъ двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ, остатокъ будетъ логариѳмъ квадрата синуса половины искомаго

угла. Возьми половину сего остатка, что будетъ (ариѳ. 230) логариѳмъ синуса, который пріискавъ въ таблицахъ получишь половину угла, удвоивъ же оную получишь цѣлый искомый уголъ.

И такъ въ предложенномъ примѣрѣ я сложу три стороны 184, 64, 142, и отъ 195 полусуммы ихъ, отниму порознь 184 и 64; что мнѣ дастъ 11 и 131 въ остаткахъ. Потомъ приложа къ 20. 0000000 двукратному логариѳму радіуса, логариѳмы 1. 0413927, 2. 1172713 остатковъ 11 и 131, буду имѣть 23. 1586640; отъ чего ежели отниму сумму 4. 0709978 логариѳмовъ 1. 8061800 и 2. 2648178 сторонъ 64 и 184, останется 19. 0876662, коего половина 9. 5438331 есть логариѳмъ синуса половины угла c; а въ таблицахъ найду, что сія половина есть почти 20°, $28\frac{1}{2}''$, что удвоивъ получаю 40°, 57′ углу c, какъ и выше найдено.

Употребляя ариѳметическія дополненія дѣйствіе приводится къ слѣдующему сложенію:

20. 0000000
1. 0413927
2. 1172713
8. 1938200
7. 7351822
39. 0876662. сумма.

Первую цифру уменьшивъ двумя единицами, получаемъ тотъ же выводъ, что и въ предъидущемъ дѣйствіи, но гораздо короче.

Сіе предложеніе служитъ къ вычисленію разстояній, когда нѣтъ инструмента для измѣренія угловъ; оно даетъ средство дѣлать вычисленіемъ то, что предписано было дѣлать помощію линѣй въ (122).

Случай, въ которомъ надобно рѣшить треугольникъ имѣющій всѣ стороны извѣстныя,

часто встрѣчается въ вычисленіи треугольниковъ одинъ отъ другаго зависящихъ.

305. Во всякомъ прямолинѣйномъ треугольникѣ, сумма двухъ сторонъ содержится къ ихъ разности, такъ какъ тангенсъ полусуммы двухъ угловъ противулежащихъ симъ сторонамъ, къ тангенсу ихъ полуразности.

Ибо сходственно съ тѣмъ, что доказано (299), АВ : син. С :: АС : син. В; и такъ (97) АВ + АС : АВ — АС :: син. С + син. В : син. С — син. В. Но (286) син. С + син. В : син. С — син. В :: тан. $\frac{С+В}{2}$; тан. $\frac{С-В}{2}$; слѣдовательно АВ + АС : АВ — АС :: тан. $\frac{С+В}{2}$ тан. $\frac{С-В}{2}$. фиг. 156.

306. Сіе предложеніе служитъ къ разрѣшенію треугольника, коего извѣстны двѣ стороны и уголъ въ нихъ содержимый. Ибо, ежели на примѣръ извѣстенъ уголъ А, то вычтя его изъ 180°, извѣстна будетъ и сумма двухъ угловъ В и С. И такъ взявъ полуостатокъ, который произойдетъ отъ сего вычитанія, и приискавъ тангенсъ его въ таблицахъ, получимъ съ двумя сторонами АВ и АС, кои полагаются извѣстными, три извѣстные члена въ доказанной пропорціи; слѣдовательно найдется четвертый членъ, которой покажетъ полуразность двухъ угловъ В и С; зная же полусумму и полуразность сихъ угловъ, можно найти (301) большій изъ нихъ, прилагая полуразность къ полусуммѣ; и меньшій, отнимая отъ сей оную. Наконецъ сыскавъ сіи два угла, удобно будетъ найти третію сторону по вышепоказанному предложенію (299).

Примѣръ. Да будетъ сторона АВ 142 фута, сторона АС 120, и уголъ А 48°, спрашивается два угла С и В, и сторона ВС.

Вычтя 48° изъ 180°; останется 132° суммѢ двухъ угловъ с и в; слѢдовательно 66° полусуммѢ ихъ. Потомъ 142 + 120 : 142 — 120 : : тан. 66 : : тан. $\frac{c-b}{2}$ или 262 : 22 : : тан. 66° : тан. $\frac{c-b}{2}$.

ДѢлая по логариѳмамъ:

логар. тан. 66°	- - - -	10, 3514169
логар. 22	- - - - - -	1, 3424227
ариѳм. дополненїе 262	- - -	7, 5816987
сумма или логар. полуразности	-	x9, 2755383,

которой соотвѢтствуетъ въ таблицѢ 10°, 41′.

Приложа сїю полуразность къ полусуммѢ 66°, и отнявъ отъ сей оную, буду имѢть, какъ явствуетъ:

66°, 00″	66°, 00″
10, 41	10, 41
уголъ с = 76, 41.	уголъ в = 55, 19.

Наконецъ для сысканїя стороны вс, сдѢлаю сїю пропорцїю: син. с : ав : : син. а : вс, то есть син. 76°, 41′ : 142 ф : : син. 48° : вс.

ДѢлай какъ въ прежнихъ примѢрахъ, найдется вс равна 108, 4 ф.

307. Сїи-то суть способы употребляемые для рѢшенїя треугольниковъ: теперь прилагаются нѢкоторые примѢры, какъ они могутъ быть приложены къ фигурамъ имѢющимъ больше нежели три стороны.

308. Положимъ, что с и d суть два предфиг. 157. мѢта, къ которымъ нельзя подойти, но нужно знать ихъ разстоянїе.

Надлежитъ вымѢрять основанїе ав, такое, чтобъ съ оконечностей его были видны оба предмѢты с и d; потомъ должно измѢрить при точкѢ а углы сав, dав, которые составляютъ съ ав линеи ас и аd мысленно проведенныя отъ точки а къ двумъ предметамъ с и d; также

должно измѣрить при точкѣ в углы СВА и DВА: Предположивъ сїе, въ треугольникѣ СВА извѣстны будутъ углы САВ, СВА и сторона АВ; посему найдется сторона АС (300). Также въ треугольникѣ АDВ извѣстны будутъ два угла DАВ, DВА и сторона АВ; чего ради по тѣмъже началамъ удобно будетъ вычислить сторону АD. Потомъ проведя мысленно линѣю СD, составится треугольникъ САD, въ которомъ извѣстны двѣ вычисленныя стороны АС, АD, и уголъ САD содержимый въ оныхъ; ибо сей уголъ есть разность двухъ угловъ САВ, DАВ, кои вымѣрены; почему найдется сторона СD (306).

309. Можно также симъ самымъ способомъ узнать, какое есть направленїе прямой СD, хотя бы и не можно было подойти къ сей линѣи. Ибо въ томъ же треугольникѣ САD можно вычислить уголъ АСD, который дѣлаютъ прямыя СD и АС; естьли же чрезъ точку С провесть мысленно линѣю СZ параллельную АВ, то уголъ АСZ будетъ супплементъ угла САВ (40); слѣдовательно взявъ разность извѣстнаго угла АСZ и вычисленнаго угла АСD, извѣстенъ будетъ уголъ DСZ, которой составляетъ прямая СD съ ZС или съ ея параллельною АВ; и поелику весьма легко узнать по компасу положенїе прямой АВ, то и направленїе прямой СD будетъ извѣстно.

310. Говоря о линѣяхъ (3) мы сказали, что покажемъ способъ опредѣлять точки тойже прямой линѣи, когда что нибудь препятствуетъ отъ одной оконечности оной видѣть другую. Вотъ какъ должно приступить къ сему:

Внѣ линѣи АВ, о которой разсуждается, избравъ такую точку С, отъ которой бы можно было видѣть оба концы А и В, должно вымѣрить разстоянїя АС и СВ, или непосредственно, или составляя треугольники имѣющїе сто- фиг. 158.

ронами сїи линѣи, и которые бы можно было вычислить подобно, какъ въ предъидущемъ примѣрѣ (308). Тогда двѣ стороны AC и CB треугольника ACB и уголъ ACB, который въ нихъ содержится, будутъ извѣстны; и посему найдется (306) уголъ BAC. Сдѣлавъ сїе, надобно поставить по какому либо направленїю CD нѣсколько колышковъ, и измѣривъ уголъ ACD, знаемы будутъ въ треугольникѣ ACD, сторона AC и два угла A и ACD; чего ради найдется (300) сторона CD. Послѣ сего надлежитъ продолжать ставить колышки въ направленїи CD, доколѣ пройдена будетъ длина равная вычисленной длинѣ; точка D, гдѣ остановится, будетъ впрямъ съ точками A и B.

311. Естьли бы не возможно было сыскать точку C, отъ которой бы могли быть видимы вдругъ обѣ точки A и B, то можно прибѣгнуть къ слѣдующему способу:

фиг. 159. Надлежитъ сыскать точку C, отъ которой бы можно было видѣть точку B; и другую точку E, отъ которой бы видимы были точки A и C; потомъ измѣривъ или опредѣливъ какимъ нибудь способомъ почерпнутымъ изъ предъидущихъ началъ, разстоянїя AE, EC и CB, надлежитъ измѣрить при точкѣ E уголъ AEC, а при C уголъ ECB: тогда въ треугольникѣ AEC, зная двѣ стороны AE, EC и содержимый въ нихъ уголъ AEC, должно вычислить (306) сторону AC и уголъ ECA, который отнявъ отъ измѣреннаго угла ECB, найдется уголъ ACB. И какъ уже вычислена AC и измѣрена CB, то выходитъ предъидущїй случай, такъ какъ бы точки A и B были видимы отъ точки C; чего ради надлежитъ окончить по вышеписанному.

фиг. 160. 312. Ежели требуется измѣрить высоту, къ основанїю которой не можно приближиться

какъ на примѣръ высоту какой нибудь горы; то должно измѣрить на землѣ основанїе FG, отъ концовъ котораго можно бы было видѣть точку A, которой высота ищется; потомъ надлежитъ вымѣрить графометромъ, коего высоту представляютъ прямыя BF и CG, углы ABC, ACB составляемые линѣями BA, CA, проведенными мысленно отъ двухъ точекъ B и C къ точкѣ A, съ основанїемъ BC; наконецъ въ одномъ изъ стоянїй, на примѣръ въ C, должно расположить сей инструментъ подобно какъ въ примѣрѣ относительномъ до фигуры 150, и измѣрить уголъ ACD, показующїй наклоненїе линѣи AC къ горизонту: тогда зная въ треугольникѣ ABC два угла ABC, ACB и сторону BC, не трудно будетъ вычислить (300) сторону AC; а въ треугольникѣ ADC, въ которомъ теперь извѣстны сторона AC, измѣренной уголъ ACD, и уголъ прямой, ибо AD есть высота перпендикулярная, легко найдется AD, которая покажетъ высоту точки A надъ точкою C. Естьли желательно потомъ знать высоту точки A надъ точкою B, и надъ всякою другою точкою, останется только нивелировать, то есть искать разность высоты между точками C и B, о чемъ мы скоро говорить будемъ.

313. Мы сказали (153), что для вычисленїя площади какого нибудь сегмента AZBV, въ коемъ число градусовъ дуги ABV и радїусъ извѣстны, надлежитъ вычислить площадь треугольника JAB, дабы вычесть оную изъ площади сектора JAVB; теперь сїе легко сдѣлать можемъ; ибо въ прямоугольномъ треугольникѣ JZB, извѣстны сверхъ прямаго угла, сторона JB и уголъ ZJB половина угла AJB, измѣряемаго дугою AVB; посему удобно найдется (295) JZ высота треугольника, и BZ половина основанїя. фиг. 74.

Явствуетъ еще изъ предъидущаго, способъ составлять уголъ или дугу опредѣленнаго числа градусовъ и минутъ.

фиг. 145. Проведемъ прямую CB произвольной длины, которую возмемъ за сторону угла, и написавъ изъ центра C дугу BDA, проведемъ радіусъ CA и хорду BA; естьли вообразимъ еще перпендикуляръ CJ и вымѣряемъ CB, то въ прямоугольномъ треугольникѣ CJB будутъ извѣстны прямой уголъ, сторона BC, и уголъ BCJ половина того угла, о которомъ разсуждается; посему можно будетъ вычислить BJ, которой двукратная будетъ величина хорды AB. И такъ взявъ отверстіе циркуля равное сей двукратной, изъ точки B, какъ изъ центра, замѣть точку A на дугѣ BDA, и проведи CA, получишь требуемый уголъ.

Мы могли бы показать здѣсь безчисленное множество другихъ употребленій Тригонометріи; но довольно и сихъ для наставленія; впрочемъ мы будемъ имѣть довольно случаевъ въ продолженіи требовать пособій отъ сей части.

О нивеллированіи или уравненіи.

314. Многія наблюденія доказываютъ, что поверхность земли не есть плоская, каковою она кажется; но кривая и даже сферичиская, или почти сферическая. Когда корабль приближается къ какому нибудь берегу, то первые предметы представляющіеся зрѣнію его, суть предметы самые возвышенные. Но естьли бы поверхность

фиг. 161. земли была плоская, то въ тоже время, въ которое открывается башня B, видима бы была и вся прилежащая земля ABC, которой не видно; понеже DAC поверхность земли понижается болѣе и болѣе въ разсужденіи BD горизонтальной

линѣи корабля. И такъ двѣ точки D и B могутъ представиться на той же горизонтальной линѣи DB, хотя онѣ и неравно отстоятъ отъ поверхности, и слѣдовательно отъ центра земли T. Горизонтальною линѣею называется линѣя проведенная на плоскости касающей поверхность моря, или параллельно такъ называемой горизонтальной плоскости. Вертикальная же линѣя есть прямая перпендикулярная къ горизонтальной плоскости.

Нивеллированіе называется дѣйствіе опредѣлять, чемъ далѣе одинъ предмѣтъ другаго отстоитъ отъ центра земли.

315. Когда одинъ изъ сихъ предмѣтовъ видимый отъ другаго представляется въ горизонтальной линіи отъ сего послѣдняго исходящей, тогда они различно удалены отъ центра земли. Дабы узнать сію разность, примѣтимъ, что разстояніе DJ, въ которомъ можно видѣть какой нибудь земный предметъ, или по крайней мѣрѣ разстояніе, въ которомъ нивеллируютъ, есть всегда столь малое, что будучи вымѣрено на поверьхности земли, можетъ почесться равнымъ тангенсу DB; но сказано выше (129), что тангенсъ DB есть средняя пропорціональная между всякою сѣкущею проведенною отъ точки B, и внѣшнею частію BJ сей сѣкущей; а ради малости дуги DJ можно почесть сѣкущую, проходящую чрезъ точку B и центръ T, равною діаметру, то есть прямой двукратной прямыя JT или DT; чего ради BJ будетъ четвертый членъ сей пропорціи: 2 DT : DJ :: DJ ; BJ. фиг. 162.

Положимъ на примѣръ, что DJ вымѣренная на поверхности земли содержитъ 1000 тоазовъ или 6000 футъ. Понеже радіусъ земли имѣетъ 19611500 футъ, то найдется BJ по сей пропорціи: 39223000 : 6000 :: 6000 : BJ; вычисляя полу-

чишь 0,91783 ф, что равно 11 д. 0 л. 2 т; то есть, между двумя предметами B и D, на тысячу тоазовъ отстоящими, и которые находятся въ тойже горизонтальной линіи, разность BJ разстояній ихъ отъ центра земли, есть 11 д. 0 л. 2 т.

316. Вычисливъ одну разность, какъ BJ, можно гораздо легче вычислять разности соотвѣтствующія меньшему разстоянію, потому что разности BJ, bi суть почти параллельны и равны линѣямъ DQ, Dq, которыя (170) содержатся между собою, какъ квадраты хордъ или дугъ DJ, Di; ибо здѣсь хорды и дуги могутъ быть взяты одна за другую. И такъ, чтобъ найти bi разность соотвѣтствующую 5000 футамъ, я сдѣлаю сію пропорцію: $\overline{6000}^2 : \overline{5000}^2 :: 0,91783 :$ bi, которая по вычисленію найдется 0. 63738 или 7 д. 7 л. $9\frac{2}{5}$ т.

фиг. 163. 317. Предложивъ сіи понятія, дабы узнать разность разстояній двухъ точекъ B и A отъ центра земли, которыя не находятся на одной горизонтальной линѣи проведенной чрезъ одну которую нибудь изъ оныхъ, должно употребить угломѣрной инструментъ, и расположивъ его, какъ сказано въ примѣрѣ относительномъ до фиг. 150, измѣрить уголъ BCD; измѣривъ же и разстояніе CD или CJ помощію цѣпи, протягая оную горизонтально, и въ разные пріемы по поверхности земли AVB, можно будетъ въ треугольникѣ CDB, принимая его за прямоугольный въ D, вычислить BD, къ коей должно приложить CA высоту инструмента и разность уравненія DJ, вычисленную сходственно съ тѣмъ, что сказано (315 и 316).

Но какъ сей образъ дѣйствія предполагаетъ великую точность въ измѣреніи угла BCD, и весьма вѣрный инструментъ; то обыкновенно

предпочитается другой продолжительнѣйшій способъ, который мы намѣрены теперь предложить.

318. Употребляютъ для сего инструментъ, какой представляетъ фигура 164, и которой называется ватерпасъ или уровень. Главная его часть есть пустая трубка изъ жести, или изъ другаго какого либо металла сдѣланная и загнутая въ концахъ A и B. Въ выдавшіяся двѣ равныя части AC и BD, вставляютъ другія двѣ трубки стеклянныя JK, склеенныя съ частями AC и BD. Весь каналъ наполняютъ водою, доколѣ она взойдетъ въ сіи двѣ стеклянныя трубки; когда вода поднимается въ каждой изъ оныхъ до равной высоты, то сіе доказываетъ, что линѣя проходящая по поверьхности воды возвысившейся въ обѣихъ сихъ трубкахъ. есть линѣя горизонтальная, и тогда употребляютъ сей инструментъ слѣдующимъ образомъ:

Производятъ многія стоянія, на примѣръ въ точкахъ D, C, B; утвердивъ въ двухъ точкахъ фиг. 165
A и N два кола перпендикулярно, наблюдатель находящійся въ D смотритъ по ватерпасу попеременно на каждой изъ оныхъ, и замѣчаетъ двѣ точки E и F соотвѣтствующія горизонтальной линѣи. Потомъ поставя другой колъ въ какой нибудь точкѣ P, по другую сторону точки C, замѣчаетъ подобнымъ образомъ двѣ точки G и H. Измѣряетъ при каждомъ стояніи высоты AE, GF, JH и проч. и исправя ихъ уравненіями (316) приличествующими разстояніямъ KE, KF, LG и проч. безъ дальной точности измѣренным, слагаетъ сіи высоты, и находитъ разность уравненія между точками A и B.

Ежелибы во время сихъ дѣйствій не всегда поднимались въ верхъ, явствуетъ, что вмѣсто

сложенія, надлежало бы вычитать количества, на которыя спускались.

Поелику мы не намѣрены здѣсь предложить подробнѣйшаго изслѣдованія нивеллированія, то не будемъ останавливаться для показанія другихъ средствъ и инструментовъ, которые для сего употребляются. Можно читать о семъ предлогѣ въ переведенномъ на россійской языкъ математическомъ курсѣ Г. Белидора, и въ Молодомъ Геодетѣ Г. Котельникова.

СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

О предварительныя понятія.

319. Сферическій треугольникЪ есть часть поверхности шара, включенная между тремя дугами круга, имѣющими общій свой центрЪ, центрЪ шара; и посему сіи три дуги, суть дуги великаго круга тогоже самаго шара.

Ежели отЪ трехЪ угловЪ A, F, G сферическаго треугольника AFG, проведены будутЪ три радіуса AC, FC, GC кЪ центру шара C; то представится пространство CAFG, какЪ треугольная пирамида, имѣющая вершину свою C вЪ центрѣ шара, и которой вогнутое основаніе AFG есть часть поверьхности сего шара. Дуги AF, FG, AG, криволинейныя стороны основанія, суть взаимныя сѣченія поверьхности шара сЪ плоскостями ACF, FCG, GCA, составляющими боковую поверьхность сея пирамиды. фиг. 166.

УголЪ A содержимый вЪ двухЪ дугахЪ AF, AG, измѣряется прямолинѣйнымЪ угломЪ JAK, содержимымЪ вЪ тангенсахЪ AJ, AK сихЪ двухЪ дугЪ; каждой изЪ сихЪ тангенсовЪ находится на плоскости той дуги, кЪ которой онЪ принадлежитЪ, и оба они перпендикулярны радіусу CA (48), которой есть сѣченіе двухЪ плоскостей ACF, ACG; по сему (191) уголЪ содержимый вЪ двухЪ тангенсахЪ, есть тотЪ же, что и уголЪ содержимый вЪ плоскостяхЪ двухЪ дугЪ ACF, и ACG; слѣдовательно

320. I с. Какой-либо сферической уголЪ FAG не что иное есть, какЪ уголЪ содержимый вЪ плоскостяхЪ двухЪ его сторонЪ AF, AG.

321. 2 е. Углы составляемые дугами великаго круга, встрѣчающимися на поверьхности шара, имѣютъ тѣже свойства, что и плоскїе углы; то есть свойства показанныя въ (192, 193 и 194).

322. По сему двѣ стороны сферическаго треугольника сутъ между собою перпендикулярны, когда плоскости сихъ дугъ взаимно перпендикулярны.

Ежели представимъ, что двѣ плоскости ACG, ACF, продолжены безпредѣльно во всѣ стороны; то явно, что сѣченїе каждой съ поверьхностїю шара, будетъ великїй кругъ; и что сїи два великїе круга разсѣкутся взаимно на двѣ равныя части въ точкахъ A и D, находящихся на продолженномъ общемъ сѣченїи AC; ибо двѣ плоскости проходящїя чрезъ центръ, имѣютъ общее сѣченїе дїаметръ шара.

323. По сему единокрайнїя двѣ стороны AG, AF сферическаго треугольника не могутъ въ иной точкѣ встрѣтиться какъ на разстоянїи AGD, или AFD равномъ 180°, щитая отъ начала ихъ соединенїя.

324. Ежели взяты будутъ двѣ дуги AB, AE каждая въ 90°, и ежели чрезъ двѣ точки B и E и центръ C проведена будетъ плоскость, которой сѣченїе съ шаромъ составляетъ великїй кругъ BENMO; говорю, что сей кругъ будетъ перпендикуляренъ двумъ кругамъ ABD, AED.

Ибо ежели проведены будутъ радїусы BC, EC, то углы ACB, ACE имѣющїе мѣрою дуги AB, AE, каждую въ 90°, будутъ прямые; посему линѣя AC перпендикулярна двумъ прямымъ CE, BC; слѣдовательно (180) она перпендикулярна ихъ плоскости, то есть кругу BENMO; а посему два круга AED, ABD, проходящїе чрезъ прямую AD, сутъ также перпендикулярны сему самому кругу

(184); чего ради обратно и сей кругъ имъ перпендикуляренъ.

Поелику не предположили мы никакой опредѣленной величины углу GAF, или EAB; то явно, что тоже самое воспослѣдуетъ, какая бы ни была величина сего угла; а изъ сего и слѣдуетъ, что кругъ BENMO перпендикуляренъ всѣмъ кругамъ проходящимъ чрезъ прямую AD.

Прямая AD называется ось круга BENMO; а двѣ точки A и D, сущія на поверьхности шара, называются полюсы (поли) сего же круга.

325. И такъ заключимъ; 1 е, что полюсы какого либо великаго круга, равно отдалены отъ всѣхъ точекъ обвода его великаго круга; и разстояніе сихъ точекъ до каждаго изъ полюсовъ, измѣряемое дугою великаго круга, есть дуга 90°.

И обратно, ежели какая либо точка A поверьхности шара, удалена на 90° отъ двухъ точекъ B и E, взятыхъ на дугѣ великаго круга; то точка A есть полюсъ сего великаго круга.

326. 2 е. Что когда дуга BF великаго круга, перпендикулярна другой дугѣ BE великаго круга; то она непремѣнно проходитъ чрезъ полюсъ сей дуги, или по крайней мѣрѣ пройдетъ, естьли продолжена будетъ довольно.

327. 3 е. Что ежели двѣ дуги BF, EG великаго круга перпендикулярны третьей дугѣ великаго круга BE; точка A, гдѣ они встрѣчаются, есть полюсъ сея дуги.

328. Поелику двѣ прямыя BC, EC суть перпендикулярны прямой AD при той же точкѣ C; то уголъ BCE въ оныхъ содержимый (191) есть

мѣра наклоненія двухъ плоскостей ABD, AED; или мѣра сферическаго угла EAB или GAF; чего ради

Сферической уголъ GAF имѣетъ мѣрою дугу BE великаго круга, которую стороны его (продолженныя ежели потребно) объемлютъ въ разстояніи на 90° отъ вершины.

329. Ежели представимъ, что полукружіе ABD обращается около діаметра AD, и что отъ различныхъ точекъ R, B, H, его обвода опущены на AD перпендикуляры RQ, BC, HP; то явствуетъ.

1 е. Что каждая изъ сихъ точекъ описываетъ обводъ круга, коего центръ есть на AD, въ точкѣ, гдѣ падаетъ перпендикуляръ; сей же перпендикуляръ есть радіусъ описываемаго круга.

2 е. Что дуги RS, BE, HL, описываемыя во время сего обращенія, и перенятыя двумя плоскостями ABD, AED, суть того же числа градусовъ; ибо ежели проведены будутъ линѣи SQ, EC, LP, будутъ всѣ онѣ перпендикулярны къ AD, поелику онѣ суть не что иное какъ радіусы RQ, BC, HP, достигшіе плоскости AED; посему (191) каждый изъ угловъ RQS, BCE, HPL; или каждая изъ дугъ RS, BE, HL измѣряетъ наклоненіе двухъ плоскостей ABD, AED; чего ради всѣ сіи дуги суть того же числа градусовъ.

3 е. Величины сихъ дугъ RS, BE, HL, суть пропорціональны синусамъ дугъ AR, AB, AH, которые измѣряютъ ихъ разстояніе до того же полюса A; или, что тоже самое, они пропорціональны косинусамъ ихъ разстояній до великаго круга, которому они параллельны. Ибо явно, что сіи дуги будучи подобны, пропорціональны своимъ радіусамъ RQ, BC, HP, кои суть синусы дугъ AR, AB, AH, или косинусы дугъ BR, O, и BH.

330. Ежели вообразить, что шаръ ABDMON представляетъ землю, а AD ея ось, или тотъ изъ ея діаметровъ, около котораго производитъ она суточное обращеніе; то кругъ BENMO, равноотстоящій отъ обоихъ полюсовъ A и D, называется екваторъ. Круги ABD. AED и всѣ имъ подобные, коихъ плоскости проходятъ чрезъ ось AD, называются меридіаны; малые круги, коихъ части представляютъ здѣсь дуги RS, HL, называются параллели екватора, или просто параллели. Дуги BH, EL, измѣряющія разстояніе параллели до екватора, называются широтою сея параллели или мѣста лежащаго на ея окружности.

Дабы опредѣлить положеніе мѣста на землѣ, относятъ его къ двумъ кругамъ неподвижнымъ и между собою перпендикулярнымъ, каковы суть круги ABDM, BENMO, такимъ образомъ: берутъ за сравнительный кругъ меридіанъ ABDM, проходящій чрезъ извѣстное и опредѣленное мѣсто; и чтобъ утвердить положеніе другаго мѣста L, воображаютъ чрезъ сіе мѣсто другой меридіанъ AELD. Явствуетъ, что положеніе сего меридіана знаемо будетъ, ежели извѣстно, сколько градусовъ въ дугѣ BE, включенной между точками B и E, гдѣ сей меридіанъ встрѣчается съ екваторомъ. Точка B будучи неподвижна, къ которой отношеніе имѣютъ всѣ другіе меридіаны; дуга BE называется тогда долготою (*) меридіана AED, и всѣхъ мѣстъ находящихся на семъ меридіанѣ; и такъ дабы опредѣлить положеніе мѣста L, остается только знать число градусовъ дуги EL;

(*) Обыкновенно щитаютъ долготу отъ запада къ востоку; кругъ, отъ котораго начинаютъ щитать, называется первый меридіанъ: Французы избрали за сей меридіанъ тотъ, который проходитъ чрезъ островъ Феръ, западнѣйшій изъ Кананирскихъ островов.

сїе-то называется широта мѣста L, также и всѣхъ мѣстъ находящихся на параллели, которой дуга HL есть часть.

Изъ сего видно, что всѣ мѣста находящїяся на томъ же меридїанѣ, имѣютъ туже долготу; а находящїяся на тойже параллели туже широту; но одна только точка L, (по крайней мѣрѣ въ тойже половинѣ шара, или въ томъ же полушарїи) можетъ имѣть въ тоже время данную долготу и широту. Чего ради положенїе мѣста уже опредѣлено, когда долгота и широта его извѣстны; но въ разсужденїи широты должно знать еще къ которому полюсу оную щитать должно. И такъ положивъ, что полюсъ A есть полуденный или южный; а полюсъ D полунощный или сѣверный, должно знать южная или сѣверная широта; ибо легко можно представить, что можетъ быть, и что дѣйствительно есть точка въ полушарїи южномъ, которой положенїе тоже, что и точки L находящейся въ сѣверномъ полушарїи.

Величина градуса великаго круга земли равна 20 морскимъ Французскимъ лигамъ, то есть 20 такимъ лигамъ, изъ коихъ каждая имѣетъ 2853 туаза; также земной градусъ равенъ 60 Италїянскимъ милямъ, 15 Нѣмецкимъ милямъ и 104 верс. 97 саж. Посему ежели идешь по екватору; то чрезъ каждыя 60 Италїянскихъ миль перемѣняется долгота однимъ градусомъ; также идучи по меридїану, чрезъ каждыя 60 миль перемѣняется однимъ градусомъ широта. Естьли же идешь по параллели екватора; то явно, что чрезъ каждыя 60 миль перемѣняется долгота болѣе нежели на градусъ, и тѣмъ болѣе, чемъ та параллель, по которой идешь, болѣе удалена отъ екватора. Чтобъ найти сколькимъ градусамъ долготы соотвѣтствуетъ нѣкоторое число миль HP, пе-

рейденныхъ по извѣстной параллели, должно сдѣлать сїю пропорцїю: косинусъ широты къ радїусу, такъ какъ число миль перейденныхъ по параллели къ четвертому члену, которой будетъ число миль соотвѣтствующей дуги въ екватора, которая означаетъ перемѣну въ долготѣ. Сїе есть непосредственное слѣдствїе сказаннаго въ (329). Напримѣръ полагая что въ широтѣ 47°, 20′ пройдено 18 Италїянскихъ миль по параллели екватора, и спрашивается, на сколько перемѣнилась долгота; то будетъ сїя пропорцїя: кос. 47°, 20′ или син. 42°, 40′ : R : : 18 миль къ четвертому члену, который выдетъ 26, 56 м. Итакъ перемѣнили долготу на 26, 56 м. или на 0°, 26′. 34″.

Обратимся теперь къ свойствамъ шара.

331. Положимъ, что AFJG, BFHG суть два великїе круги шара; и ABDEJH третїй великїй кругъ, сѣкущїй сїи два перпендикулярно; слѣдуетъ изъ сказаннаго (326), что кругъ ABDEJH проходитъ чрезъ полюсы двухъ круговъ AFJG, BFHG; да будутъ сїи полюсы D и E; а DK и EL двѣ оси. Послику углы ACD, BCE прямые; то, ежели отъ каждаго изъ сихъ отнятъ будетъ общїй уголъ BCD; остальные углы ACB, DCE будутъ равные; а посему и дуги AB, DE равны; чего ради дуга DE, измѣряющая кратчайшее разстоянїе полюсовъ двухъ великихъ круговъ, равна дугѣ AB, измѣряющей меньшїй изъ двухъ угловъ, которые сїи круги дѣлаютъ. фиг. 167.

Свойства сферическихъ треугольниковъ.

332. Явствуетъ, что чрезъ двѣ точки, взятыя на поверьхности шара, можно провесть только одну дугу великаго круга. Ибо сей великій кругъ есть сѣченіе поверьхности шара съ плоскостію долженствующею пройти чрезъ центръ; извѣстно же, что чрезъ три данныя точки можно провести одну только плоскость.

333. Хотя сферической треугольникъ можетъ имѣть нѣкоторыя изъ своихъ частей больше 180°; однако мы будемъ разсуждать о такихъ только, которыхъ каждая часть меньше 180°; поелику можно всегда знать одинъ изъ сихъ треугольниковъ посредствомъ другаго. Напримѣръ, ежели предлагается треугольникъ ABEMU фиг. 166. составленный изъ нѣкоторыхъ дугъ AB, AU, и дуги BMU большей 180°; то вообразивъ цѣлый кругъ BMUB, можно вмѣсто треугольника ABEMU взять треугольникъ BOUA, котораго дуга BOU меньше 180°; ибо части перваго треугольника или равны частямъ втораго, или ихъ супплементы до 180°, или до 360°; посему и видно, что одинъ изъ сихъ треугольниковъ можетъ быть извѣстенъ посредствомъ другаго.

334. Каждая сторона сферическаго треугольника меньше суммы двухъ прочихъ сторонъ.

Сіе явствуетъ.

335. Сумма трехъ сторонъ сферическаго треугольника всегда меньше 360°.

Поелику (334) FG меньше DG+DF; но GA+AF сложенныя съ GG+DF составляютъ 360°; слѣдовательно AG+AF сложенныя съ FG будутъ меньше 360°.

336. Да будетъ ABC какой нибудь сферической треугольникъ; и DEF другой сферической треугольникъ такой, что точка A есть полюсъ дуги EF, точка C полюсъ дуги DE, и точка B полюсъ дуги DF; говорю, что каждая сторона треугольника DEF будетъ супплементъ угла противулежащаго ей въ треугольникѣ ABC; и каждый уголъ треугольникѣ DEF будетъ супплементъ стороны противулежащей ему въ треугольникѣ ABC. фиг. 168.

Ибо когда точка A есть полюсъ дуги EF; точка E должна быть удалена отъ точки A на 90° (325); посему же, когда C есть полюсъ дуги DE, точка E должна отстоять на 90° отъ точки C; слѣдовательно (325) точка E есть полюсъ дуги AC; такимъ же образомъ можно доказать, что точка D есть полюсъ дуги BC, а F полюсъ дуги AB.

Положивъ сіе, продолжимъ дуги AC, AB, пока встрѣтятся съ дугою EF въ точкахъ G и H; поелику точка E есть полюсъ дуги ACG, то дуга EG 90°, а точка F есть полюсъ дуги AHB, то и дуга FH 90°; посему EG + FH или EG + FG + GH или EF + GH равны 180°; но дуга GH есть мѣра угла A (328), ибо каждая изъ дугъ AG, AH равна 90°; слѣдовательно EF + A равны 180°; чего ради дуга EF есть супплементъ угла A. Такимъ же образомъ докажется, что дуга DE есть супплементъ угла C, а DF супплементъ угла B.

Продолжимъ дугу AB, доколѣ встрѣтится съ дугою DF въ точкѣ J. Каждая изъ дугъ AH и BJ будетъ 90°, ибо точки A и B суть полюсы дугъ EF, DF; посему AH + BJ, или AH + AB + AJ, или HJ + AB равны 180°, но дуга HJ есть мѣра угла F (328); ибо точка F поль дуги HJ; слѣдовательно F + AB равны 180°; чего ради уголъ F есть суп-

плементъ дуги AB. Такимъ же образомъ докажется, что уголъ E есть супплементъ дуги AC; а уголъ D супплементъ дуги BC.

337. Заключимъ отсюду, что сумма трехъ угловъ сферическаго треугольника всегда меньше 540° или трижды 180°, а больше 180°.

Поелику сумма трехъ угловъ A, B, C съ суммою трехъ сторонъ EF, DF, DE равны трижды 180° (336); слѣдовательно, 1 е, сумма трехъ угловъ A, B, C меньше трижды 180°; или 540°. 2 е, ибо сумма трехъ сторонъ EF, DF, DE (335) меньше 360° или дважды 180°; остается для суммы трехъ угловъ A, B, C больше 180°.

338. Сферическій треугольникъ можетъ имѣть всѣ три угла прямые, и всѣ три угла тупые.

И такъ видно, что сумма трехъ угловъ сферическаго треугольника не такое количество, которое бы всегда было тоже, какъ въ прямолинѣйныхъ треугольникахъ; слѣдовательно не можно изъ двухъ извѣстныхъ угловъ заключить о третьемъ.

339. Поелику каждая изъ частей треугольника DEF есть супплементъ каждой противулежащей ей части въ треугольникѣ ABC; то можно рѣшить одинъ изъ сихъ треугольниковъ посредствомъ другаго; ибо зная части одного, извѣстны будутъ части другаго. Мы будемъ употреблять сей способъ; и понеже сей два треугольника часто будутъ встрѣчаться; то для сокращенія назовемъ треугольникъ DEF супплементнымъ (исполнительнымъ) треугольникомъ.

340. Два сферическіе треугольника, изображенные на томъ же или равныхъ шарахъ, равны бываютъ, 1 е, когда имѣютъ равную сторону прилежащую двумъ равнымъ

угламъ единъ по единому. 2е, когда имѣютъ равный уголъ содержимый въ равныхъ сторонахъ едина по единой. 3е, когда имѣютъ три стороны равныя едина по единой. 4е, когда имѣютъ три угла равные единъ по единому.

Первые три случая доказываются точно такъ, какъ и въ прямолинѣйныхъ треугольникахъ. Смотри 80, 81 и 83.

Что касается до четвертаго случая, послику онъ не имѣетъ мѣста въ прямолинѣйныхъ треугольникахъ, то онъ доказывается особливо слѣдующимъ образомъ.

Да будутъ написаны каждаго изъ треуголь- фиг. 168.
никовъ ABC и abc супплементные треугольники и 169.
DEF и def. Понеже углы A, B, C, равны угламъ a, b, c, каждый каждому, то и стороны EF, DF, DE супплементы первыхъ угловъ, будутъ также равны сторонамъ ef, df, de супплементамъ послѣднихъ; и такъ по третьему изъ помянутыхъ случаевъ сіи два треугольника DEF и def будутъ совершенно равны; чего ради и углы D, E, F, будутъ равны угламъ d, e, f, каждый каждому; а посему и стороны BC, AC, AB супплементы первыхъ трехъ угловъ, будутъ равны сторонамъ bc, ac, ab, супплементамъ трехъ послѣднихъ угловъ.

341. Въ равнобедренномъ сферическомъ треугольникѣ углы противъ равныхъ сторонъ взаимно равны; и обратно, ежели два угла въ сферическомъ треугольникѣ взаимно равны, противулежащія имъ стороны также равны.

Отъ равныхъ сторонъ AB, AC, отними равныя дуги AD, AE, и проведи дуги великихъ круговъ DC, BE: и такъ два треугольника ADC. AEB, фиг. 170.
имѣющіе общій уголъ, содержимый въ двухъ равныхъ сторонахъ едина по единой, будутъ взаимно

равны (340): а посему и дуга BE равна будетъ дугѣ CD; слѣдовательно два треугольника BDC и BEC взаимно равны; понеже кромѣ DC равной BE, какъ сїе видѣли, они имѣютъ BC общую, и еще прочїя стороны BD, CE равныя; ибо сїи стороны суть остатки двухъ равныхъ дугъ AB, AC, отъ которыхъ отняты равныя дуги AD, AE. А изъ сего, что два треугольника взаимно равны, можно заключить, что уголъ DBC или ABC равенъ углу BCB или ACB.

Что касается до второй части предложенїя, то она есть слѣдствїе первой; ибо вообразивъ супплементный треугольникъ DEF, двѣ стороны
фиг. 168. его DF, DE, будучи супплементы равныхъ угловъ BИC, суть равны; по сему треугольникъ DEF будетъ равнобедренный; и такъ углы E и F будутъ взаимно равны; чего ради и супплементы ихъ стороны AC и AB будутъ взаимно равны.

фиг. 171. 342. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC большая сторона противулежитъ большему углу, и обратно.

Ежели уголъ B больше угла A, можно внутри треугольника провести дугу великаго круга BD такъ, чтобъ сдѣлала уголъ ABD равный углу BAD; посему BD будетъ равна AD (341); но BD+DC больше BC; слѣдовательно AD+DC или AC будетъ больше BC.

Обратное удобно доказать можно подобнымъ образомъ, употребляя супплементный треугольникъ.

Послѣднїя показанныя предложенїя полезны въ рѣшенїи сферическихъ треугольниковъ, гдѣ все искомое опредѣляется синусами или тангенсами, которые принадлежа дугамъ меньшимъ 90°, или ихъ супплементамъ, могутъ часто навести сумнѣнїе, которую изъ сихъ дугъ принять должно; но сїи знанїя не довольны для показанїя. въ какихъ

случаяхъ искомое должно быть больше или меньше 90°, и въ какихъ случаяхъ можно взять и то и другое.

Средства узнавать, въ какихъ случаяхъ искомые углы, или стороны прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ должны быть больше или меньше 90°.

343. Хотя два и даже три угла прямоугольнаго сферическаго треугольника могутъ быть прямые, а посему могутъ быть въ семъ треугольникѣ двѣ или три ипотенузы, однакожъ мы будемъ называть ипотенузой только сторону противулежащую тому прямому углу, о которомъ будемъ разсуждать; а прочїе два угла называть будемъ косвенными углами.

344. Каждый изъ двухъ косвенныхъ угловъ прямоугольнаго сферическаго треугольника одинакъ со стороною ему противулежащею; то есть ежели сторона 90°, то и уголъ 90°, и ежели сторона больше или меньше 90°, то и уголъ будетъ больше или меньше 90°.

Да будетъ уголъ в прямый; ежели вс меньше 90°, то продоливъ оную до точки d, такъ чтобъ вd была 90°; точка d будетъ полюсъ дуги ав (326); почему дуга великаго круга dа, проведенная отъ края стороны ва, будетъ перпендикулярна къ ва; слѣдовательно уголъ dав будетъ прямой; чего ради уголъ сав меньше 90°. Подобнымъ образомъ можно доказать и другїе два случая. фиг. 172.

345. Ежели двѣ стороны, или два угла прямоугольнаго сферическаго треугольника одинаки, то есть каждое меньше или больше 90°; ипотенуза всегда будетъ меньше 90°; напротивъ, ежели не одинаки, ипотенуза будетъ больше 90°.

Ибо, положивЪ тоже устроенїе что и вЪ предЪидущемЪ предложенїи. ежели и AB меньше 90°, уголЪ ADB, который долженЪ быть (344) одинакЪ со стороною AB, будетЪ меньше 90°; для тойже причины уголЪ ACB будетЪ меньше 90°; слѢдовательно уголЪ ACD будетЪ тупый, и посему больше угла ADC; чего ради AD больше AC (342); но AD 90°, слѢдовательно AC меньше 90°.

ПодобнымЪ образомЪ ежели двѢ стороны BC, и AB около прямаго угла B, каждая больше 90°;
фиг. 173. ипотенуза AC будетЪ тогда меньше 90°; ибо ежели взять дугу BD равную 90°, точка D будучи полюсЪ дуги AB, дуга AD будетЪ 90°; но поелику AB больше 90°; уголЪ ACB будетЪ тупый (344). Тоже и такимЪ же образомЪ можно сказать и о углѢ ADB; и посему уголЪ ADC будетЪ острый, слѢдовательно меньше угла ACD; чего ради также AC будетЪ меньше AD (342), то есть меньше 90°.

НапротивЪ, ежели AB меньше 90°; а BC больше; тогда уголЪ ACB, который одинакЪ со сто-
фиг. 174. роною AB (344), будетЪ острый. Тоже самое можно сказать и о углѢ ADB; и посему уголЪ ADC будетЪ тупый, слѢдовательно больше угла ACD; чего ради AC будетЪ больше AD, то есть больше 90°.

Что касается до угловЪ сравниваемыхЪ сЪ ипотенузою, истинна сего предложенїя слѢдуетЪ изЪ того, что каждый изЪ угловЪ одинакЪ сЪ сопротивною ему стороною (344).

346. Отсюду слѢдуетЪ, т. е. что ежели ипотенуза меньше или больше 90°; стороны и косвенные углы будутЪ одинаки, или не одинако между собою.

347. 2 е. Ежели ипотенуза и одна изЪ сторонЪ одинаки или не одинаки, остальная сторона и уголЪ ей сопротивный будетЪ, меньше или больше 90°.

Начала для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

348. Рѣшеніе прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ зависитъ отъ трехъ началъ, которыя предложены будутъ по порядку, и изъяснены въ послѣдствіи примѣрами. Первое начало есть общее прямоугольнымъ и косвенноугольнымъ сферическимъ треугольникамъ.

Каждый случай прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ можно рѣшить одною пропорціею, которая всегда можетъ быть выведена изъ одного или другаго изъ трехъ слѣдующихъ началъ.

349. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC пребываетъ всегда сія пропорція: синусъ одного изъ угловъ содержится къ синусу противулежащей ему стороны, такъ какъ синусъ другаго угла, къ синусу стороны противулежащей сему углу. фиг. 175.

Да будетъ точка H центръ шара, BH, AH, HC три радіуса, и отъ вершины угла A да будетъ опущенъ перпендикуляръ AD на плоскость противулежащей стороны BC, и чрезъ сію прямую да пройдутъ двѣ плоскости ADE, ADF, такъ чтобъ радіусы BH, CH были имъ перпендикулярны, а именно радіусъ BH перпендикуляренъ плоскости ADE, а радіусъ CH перпендикуляренъ плоскости ADF. Линѣи AE, DE сѣченія двухъ плоскостей ABH, CBH съ плоскостію ADE, будутъ перпендикулярны къ BH общему сѣченію сихъ двухъ плоскостей; и посему уголъ AED будетъ наклоненіе двухъ плоскостей (191), слѣдовательно равенъ сферическому углу ABC (320); по сей же причинѣ уголъ AFD равенъ будетъ сферическому углу ACB.

Положивъ сїе, два треугольника ADE, ADF, имѣя прямые углы при точкѣ D, дадутъ сїи пропорцїи (295):

R : син. AED : : AE : AD.
и син. AFD : R : : AD : AF.

Слѣд. (100) син. AFD : син. AED : : AE : AF.

Но линѣи AE, AF будучи перпендикуляры опущенные отъ края A дугъ AB, AC къ радїусамъ BH, CH, проходящимъ чрезъ другїе краи сихъ дугъ, суть (269) синусы сихъ самыхъ дугъ; чего ради, понеже углы AEB, AFD равны угламъ B и C, будетъ син. C : син. B : : син. AB : син. AC.

Такимъ же образомъ можно доказать, что син. C : син. A : : син. AB : син. BC.

350. Ежели одинъ изъ сравниваемыхъ угловъ прямый, то, поелику синусъ его тогда равенъ радїусу (274), сказанная пропорцїя можетъ быть такъ поставлена: радїусъ къ синусу ипотенузы, такъ какъ синусъ одного изъ косвенныхъ угловъ, къ синусу противулежащей ему стороны.

351. Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ, радїусъ содержится къ синусу одной изъ сторонъ около прямаго угла, такъ какъ тангенсъ косвеннаго угла противулежащаго другой сторонѣ, къ тангенсу сей стороны.

фиг. 176. Да будетъ уголъ B прямой. Отъ края C стороны BC да будетъ проведенъ перпендикуляръ CJ къ радїусу шара BD; и чрезъ сїю прямую CJ, да пройдетъ плоскость CJE такъ, чтобъ радїусъ DA былъ къ ней перпендикуляренъ: тогда уголъ JEC равенъ будетъ сферическому углу A; и поелику полагается, что двѣ плоскости DBC, DBA перпендикулярны между собою: то линѣя CJ, перпендикулярная общему ихъ сѣченїю BD, будетъ (185) перпендикулярна плоскости DBA; а посему и прямой JE (178).

Положивъ сїе въ прямоугольномъ треугольникѣ

ејс, будетъ (296) dj : cj : : r : тан. jdc; также въ прямоугольномъ треугольникѣ ejc, cj : je : : тан. jec : r; чегоради (100) dj : je : : тан. jec : тан. jdc или : : тан. a : тан. bc; ибо уголъ jdc имѣетъ мѣрою дугу bc. Есть же въ прямоугольномъ треугольникѣ jed (295) dj : je : : r : син. jde или син. ab; слѣдовательно ради общаго содержанія dj къ je будетъ r : син. ab : : тан. a : тан. bc.

352. Во всякомъ прямоугольномъ сферическомъ треугольникѣ abc, ежели продолжены будутъ двѣ стороны bc, ac около одного изъ косвенныхъ угловъ, къ точкамъ d и e, такъ, чтобъ каждая изъ db, ae была 90°; и ежели краи ихъ точки d и e будутъ соединены дугою великаго круга de; составится новый прямоугольный треугольникъ ced, имѣющій прямый уголъ при точкѣ e, котораго части будутъ или равныя частямъ треугольника abc, или ихъ комплементы.

Продолжимъ стороны ab и de, пока встрѣтятся въ точкѣ f. Посилику bd есть 90°, и перпендикулярна къ ab, то точка d есть полюсъ дуги ab (326); посему df есть 90°, и перпендикулярна къ af; для той же причины и da есть 90°.

Понеже ae по устроенію 90°; естьже и da 90°; то точка a есть полюсъ дуги df (325); а посему ae перпендикулярна къ df, и слѣдовательно треугольникъ ced прямоугольный, имѣющій прямый уголъ при точкѣ e.

Положивъ сіе, явно, что уголъ e равенъ углу b, и что уголъ dce равенъ углу acb (321); что сторона dc есть комплементъ стороны cb; что сторона de будучи комплементъ ef, которая есть (328) мѣра угла cab; есть комплементъ сего угла cab; что ce есть комплементъ ac; и что уголъ d, имѣющій мѣрою дугу bf, которыя комплементъ ab, есть самъ комплементъ сей дуги ab;

чего ради дѣйствительно части треугольника DCE, или равны частямъ треугольника ABC, или ихъ комплементы.

Можно тоже самое доказать и о треугольникѣ AHJ, который изобразится продолжая выше точки A, стороны BA, AC около косвеннаго угла BAC, доколѣ каждая сдѣлается 90°.

353. Изъ сего явствуетъ, что когда извѣстны въ треугольникѣ ABC три вещи, то извѣстны будутъ три вещи и въ каждомъ изъ треугольниковъ CED, AHJ. Также видно, что остальныя три части въ треугольникѣ ABC, будучи сысканы, сдѣлаютъ извѣстными остальныя три части въ каждомъ изъ сихъ двухъ треугольниковъ CED, AHJ, и обратно.

И такъ, когда разрѣшая треугольникъ ABC, не можно употребить непосредственно ни единаго изъ двухъ началъ показанныхъ (349 и 351); въ такомъ случаѣ должно прибѣгнуть къ одному изъ треугольниковъ CED, AHJ; и тогда приложенїе того или другаго изъ сихъ двухъ началъ будетъ имѣть мѣсто, и дастъ свѣденїе о частяхъ сихъ треугольниковъ, которые потомъ сдѣлаютъ извѣстными части треугольника ABC, какъ о семъ сей часъ было сказано. Мы впредь называть будемъ треугольники CED, AHJ комплементными (дополнительными) треугольниками.

фиг. 178. Ежели бы стороны AB, AC, или AC, BC, которыя въ доказанной пропорцїи (352) полагаются меньше 90°, были каждая больше, или одна изъ нихъ больше, а другая меньше 90°, какъ въ треугольникѣ FBC; тогда вмѣсто вычисленїя треугольника FBC, надлежало бы вычислить треугольникъ ABC, составленный изъ дугъ FC, FB, продолженныхъ до 180°; части сего треугольника будучи извѣстны, сдѣлаютъ извѣстными и части треугольника FBC. Въ прочемъ нѣтъ необходимости въ семъ способѣ; пропорцїя, которую

покажетъ фигура 177, имѣетъ всегда мѣсто, хотябы части треугольника были меньше или больше 90°.

Замѣтимъ о прямоугольныхъ сферическихъ треугольникахъ то, что мы сказали о прямолинѣйныхъ прямоугольныхъ треугольникахъ; а именно, что прямой уголъ будучи извѣстенъ, довольно, чтобъ рѣшить прямоугольный треугольникъ, знать двѣ вещи кромѣ прямаго угла. Приступимъ теперь къ примѣрамъ.

Примѣръ I. Положимъ сторону BC 15°, 17′; уголъ A, 23°. 42′; требуется сыскать ипотенузу AC. фиг. 177.

Для сысканія ипотенузы, можно непосредственно употребить начало показанное (349), учинивъ сію пропорцію: син. A : син. BC :: R : син. AC. Сія пропорція есть не что иное, какъ показанная (350), которой переставлены оба содержанія. Въ настоящемъ случаѣ будемъ имѣть: син. 23°. 42′ : син. 15°. 17′ :: R : син. AC.

Дѣлая по логариѳмамъ, будетъ:

лог. син. 15°. 17′ - - - -	9, 4209330
лог. радіуса - - - - - -	1. . . . . . .
ариѳм. допол. логар. син. 23°, 42′. -	0, 3958304
Сумма или лог. AC - - - -	19, 8167634

Сей логариѳмъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ дугѣ 40°. 59′, такъ что ипотенуза AC есть 40°. 59′, ежели она должна быть меньше 90°; или исполненіе 40°, 59′, то есть 139°. 1′, ежели она должна быть больше 90°; ибо здѣсь ничѣмъ не можно ограничить, что ипотенуза AC меньше или больше должна быть 90°, и сіи два рѣшенія суть равно возможныя; въ чемъ легко можно увѣриться, смотря на фигуру 178, гдѣ два треугольника ABC, ADE, могутъ противъ тогоже угла A, имѣть сторону BC, равную

сторонѣ DE; а ипотенузы AC, AE различныя. Но продолжая AC, AB, доколѣ встрѣтятся въ точкѣ F, видно, что AE есть исполненїе AC; поелику AE есть исполненїе EF, равной AC, когда DE равна BC.

Примѣръ II. Для сысканїя стороны AB тогожъ
фиг. 177. го же треугольника ABC, можно прямо употребить предложенїе показанное (351), дающее сїю пропорцїю: R : син. AB : : тан. A : тан. BC, или тан. A : тан. BC : : R : син. AB, то есть, тан. 23°. 42′ : тан. 15°. 17′ : : R : син. AB.

А по логариѳмамъ дѣлая, будетъ:

лог. тан. 15°. 17′ - - - -	9, 4365704
лог. радїуса - - - - -	1.........
ариѳ. доп. лог. тан. 23°, 42′ - -	0, 3575658
Сумма, или логариѳмъ син. AB -	19, 7941362

Сей логариѳмъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ дугѣ 38°. 30′, и сторона AB есть 38°. 30′, или 141°. 30′, судя по тому, меньше или больше она должна быть 90°; то есть, должна ли она принадлежать треугольнику ABC, или треугольнику ADE.

Примѣръ III. Прямый уголъ, уголъ A, и
фиг. 177. сторона BC будучи всегда одни извѣстныя вещи, примѣчаю, что для сысканїя угла C тогоже треугольника, нельзя приложить ни которой изъ двухъ показанныхъ пропорцїй (349 и 351), поелику не могу имѣть какъ только двѣ извѣстныя вещи въ одной и въ другой; чего ради прибѣгаю къ комплементному треугольнику DCE, въ коемъ сторона DE, комплементъ угла A 23°. 42′, будетъ 66°. 18′; сторона или ипотенуза DC комплементъ BC или 15°. 17′, будетъ 74°. 43′, и уголъ DCE равенъ искомому углу ACB. Въ треугольникѣ же DCE можно приложить пропорцїю показанную въ (350); а именно: син. DC : R : : син. DE : син. DCE; то есть син. 74°. 43′ : R : : син. 66°. 18′ : син. DCE.

Дѣлая по логариѳмамъ:

лог. син. 66°, 18′ - - - - - 9, 9617355
лог. рад. - - - - - - 1.........
ариѳм. допол. лог. син. 74°, 43′ - 0, 0156374

Сумма или лог. син. DCE - - 19, 9773729

Сей логариѳмъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ дугѣ 71°. 40′; слѣдовательно уголъ DCE, а посему искомый уголъ ACB, есть 71°. 40′, или 108°. 20′, супплементъ 71°, 40′; ибо здѣсь ничто не ограничиваетъ, таковъ ли долженъ быть разрѣшаемый треугольникъ ACB, какъ треугольникъ ACB фигуры 178, или таковъ какъ треугольникъ AED сей же самой фигуры; то и остается неизвѣстнымъ, уголъ ли ACB взять должно, или уголъ AED, супплементъ его.

Примѣръ IV. Да будетъ сторона AB треугольника ABC, 48°. 51′, и сторона BC 37°. 45′; ежели потребно найти ипотенузу AC, должно прибѣгнуть къ комплементному треугольнику DCE, въ которомъ тогда извѣстна будетъ ипотенуза DC, ибо есть комплементъ BC или 37°, 45′; и слѣдовательно будетъ 52°. 15′; извѣстенъ также уголъ D, имѣющій мѣрою BF, комплементъ AB или 48°. 51′, посему будетъ онъ 41°. 09′; а для сысканія ипотенузы AC, должно только вычислить сторону CE, которой она есть комплементъ. Въ треугольникѣ же DCE, для CE, должно сдѣлать сію пропорцію (350): R: син. DC:: син. D: син. CE; то есть R: син. 52°. 15′:: син. 41° 09″: син. CE. фиг. 177.

Дѣлая по логариѳмамъ, будетъ:

лог. син. 41°. 09″ - - - - 9, 8182474
лог. син. 52, 15 - - - - 9, 8980060

Сумма - - - - - - 19, 7162534
Лог. рад. - - - - - - 1 .....

Остатокъ или лог. син. CE. - - 9, 7162534

соотвѣтствующій въ таблицахъ 31°. 21′. Слѣдовательно AC, которая есть дополненіе CE;

будетъ непремѣнно 58°. 39′; ибо, понеже двѣ стороны ав, ас одинаки, ипотенуза должна быть (345) меньше 90°.

Примѣръ V. Чтобъ изъ тѣхъ же данныхъ найти уголъ с, или уголъ а, должно прямо приложить предложеніе (351), которое для угла а дастъ слѣдующую пропорцію:

R: син. ав:: тан. а: тан. вс, или
син. ав: R:: тан. вс: тан. а; то есть,
син. 48°. 51′: R:: тан. 37°, 45′: тан. а. По тойже причинѣ будетъ для угла с сія пропорція: син. вс: R:: тан. ав: тан. с; то есть, син. 37°, 45′: R:: тан. 48°, 51′: тан. с.

Дѣлая по логариѳмамъ, будетъ для угла а:

лог. тан. 37°. 45′ - - - -	9, 8888996
лог. рад. - - - - -	1........
ариѳ. допол. лог. син. 48° 51′ -	0. 1232111
Сумма или лог. тан. а - -	10, 0121107

Для угла с:

лог. тан. 48°. 51′ - - -	10, 0585415
лог. рад. - - - - -	1........
ариѳ. допол. лог. син. 37°, 45′ -	0, 2130944
Сумма или лог. тан. с - - -	10, 2716359

Отнявъ единицу отъ первой цифры, какъ сказано въ (297).

Симъ логариѳмамъ соотвѣтствуютъ въ таблицахъ 45°, 48′ и 61°, 51′; изъ которыхъ первое количество есть величина угла а, а второе величина угла с. Поелику каждая изъ двухъ сторонъ ав, вс меньше 90°; два угла а и с должны быть также (344) меньше 90°.

Сіи примѣры довольны подать свѣденіе, какимъ образомъ должно поступать въ другихъ случаяхъ; но чтобъ въ подобныхъ вычисленіяхъ не имѣть труда употреблять комплементныхъ треугольниковъ, мы приложимъ здѣсь таблицу, показывающую пропорціи, какую должно брать въ каждомъ случаѣ.

Таблица для рѣшенія прямоугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, во всѣхъ возможныхъ случаяхъ. (а

Данныя	Искомыя	Пропорціи	Случаи въ которыхъ искомое должно быть меньше 90°
АВ, АС	С	Син. АС : R : : син. АВ : син. С.	ежели АВ меньше 90°.
	А	Кот. АВ : кот. АС : : R : кос. А.	ежели АВ и АС одинаки.
	ВС	Кос. АВ : кос. АС : : R : кос. ВС.	ежели АВ и АС одинаки.
АВ, ВС	А	Син. АВ : R : : тан. ВС : тан. А.	ежели ВС меньше 90°.
	С	Син. ВС : R : : тан. АВ : тан. С.	ежели АВ меньше 90°.
	АС	R : кос. ВС : : кос. АВ : кос. АС.	ежели АВ и ВС одинаки.
АВ, А	С	R : кос. АВ : : син. А : кос. С.	ежели АВ меньше 90°.
	АС	R : кос. А : : кот. АВ : кот. АС.	ежели АВ и А одинаки.
	ВС	R : син. АВ : : тан. А : тан. ВС.	ежели А меньше 90°.
АВ, С	А	Кос. АВ : R : : кос. С : син. А.	сумнителенъ.
	АС	Син. С : син. АВ : : R : син. АС.	сумнительна.
	ВС	Тан. С : тан. АВ : : R : син. ВС.	сумнительна.
ВС, АС	А	Син. АС : R : : син. ВС : син. А.	ежели ВС меньше 90°.
	С	Кот. ВС : кот. АС : : R : кос. С.	ежели АС и ВС одинаки.
	АВ	Кос. ВС : кос. АС : : R : кос. АВ.	ежели АС и ВС одинаки.
ВС, А	С	Кос. ВС : R : : кос. А : син. С.	сумнителенъ.
	АС	Син. А : син. ВС : : R : син. АС.	сумнительна.
	АВ	Тан. А : тан. ВС : : R : син. АВ.	сумнительна.
ВС, С	А	R : кос. ВС : : син. С : кос. А.	ежели ВС меньше 90°.
	АС	R : кос. С : : кот. ВС : кот. АС.	ежели ВС и С одинаки.
	АВ	R : син. ВС : : тан. С : тан. АВ.	ежели С меньше 90°.
АС, А	С	Кос. АС : R : : кот. А : тан. С.	ежели АС и А одинаки.
	АВ	Кос. А : R : : кот. АС : кот. АВ.	ежели АС и А одинаки.
	ВС	R : син. АС : : син. А : син. ВС.	ежели А меньше 90°.
АС, С	А	R : кос. АС : : тан. С : кот. А.	ежели АС и С одинаки.
	АВ	R : син. АС : : син. С : син. АВ.	ежели С меньше 90°.
	ВС	Кос. С : R : : кот. АС : кот. ВС.	ежели АС и С одинаки.
А, С	АС	Тан. С : кот. А : : R : кос. АС.	ежели А и С одинаки.
	АВ	Син. А : кос. С : : R : кос. АВ.	ежели С меньше 90°.
	ВС	Син. С : кос. А : : R : кос. ВС.	ежели А меньше 90°.

(а) Сія таблица относится къ треугольнику АВС фигуры 177, въ которомъ уголъ в прямой.

Показанныя въ сей таблицѣ пропорцїи, всѣ основаны на двухъ началахъ доказанныхъ въ (349 и 351), и приложенныхъ, или непосредственно къ треугольнику ABC, или къ комплементнымъ треугольникамъ, потомъ перенесены къ треугольнику ABC. На примѣръ, первая пропорцїя есть таже, что въ §. 349 или въ §. 350, приложенная непосредственно треугольнику ABC, превращая только два содержанїя. Вторая одинакова съ показанною въ §. 351, приложенная къ комплементному треугольнику CED, въ которомъ R : син. DE :: тан. D : тан. CE; или относя къ треугольнику ABC, R : кос. A :: кот. AB. кот. AC; или прелагая первое содержанїе на мѣсто втораго, кот. AB : кот. AC :: R : кос. A.

Такимъ же образомъ можно найти прочїя пропорцїи, показанныя въ сей таблицѣ. Преложенїя сдѣланныя въ пропорцїяхъ, которыя даютъ непосредственно два начала (349 и 351), не суть необходимы; единственный ихъ предметъ сдѣлать искомое количество четвертымъ членомъ пропорцїи.

О сферическихъ косвенноугольныхъ треугольникахъ.

354. Прямоугольные сферическїе треугольники рѣшатся во всѣхъ случаяхъ одною только пропорцїею. Что принадлежитъ до косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, то во многихъ случаяхъ должно дѣлать двѣ пропорцїи. Въ сихъ случаяхъ потребно опускать перпендикулярно дугу великаго круга, отъ одного изъ угловъ даннаго треугольника, на противулежащую ему сторону. Поелику сїя дуга можетъ упасть или на самую сторону, или на продолженїе ея; судя по различнымъ содержанїямъ величины сто-

ронъ и угловъ: потребно, прежде показанія началъ рѣшенія сего рода треугольниковъ, различить случаи, когда перпендикулярно проведенная дуга падаетъ внутри треугольника, и когда внѣ.

355. Дуга великаго круга AD, проведенная перпендикулярно отъ угла A сферическаго треугольника, на противулежащую сторону, падаетъ въ треугольникъ, ежели углы B и C одинаки; и внѣ его, когда они не одинаки. фиг. 180 и 181.

Ибо въ прямоугольныхъ треугольникахъ ADC, ADB, каждый изъ двухъ угловъ B и C долженъ быть одинакъ съ противулежащею стороною AD (344); слѣдовательно они должны быть и между собою одинаки. фиг. 180.

Въ прямоугольныхъ треугольникахъ ADC, ADB, каждый изъ угловъ ACD, ABD, долженъ быть одинакъ съ противулежащею стороною AD; а посему, ибо ABC есть исполненіе ABD, углы ABC и ACD далжны быть не одинаки. фиг. 181.

Начала для рѣшенія косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

356. Рѣшеніе всѣхъ возможныхъ случаевъ косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, зависитъ отъ пяти началъ, которыя мы покажемъ, и отъ рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ. Всѣ сіи начала не нужны вдругъ для каждаго случая, но нужны для рѣшенія всѣхъ. Изъ сихъ пяти началъ, мы уже показали два въ §. 336 и 349; прочія же три здѣсь предлагаются,

357. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC, ежели отъ угла A опущена будетъ дуга AD великаго круга, перпендикулярно, на противулежащую сторону BC, фиг. 179.

будетъ всегда сїя пропорцїя: косинусъ отсѣка BD, къ косинусу отсѣка CD, такъ какъ косинусъ стороны AB, къ косинусу стороны AC.

Да будетъ G центръ шара, и отъ вершины углу A да будетъ опущенъ перпендикуляръ AJ на плоскость BGC дуги BC, будутъ онъ на плоскости AGD дуги AD. Да будетъ проведены чрезъ прямую AJ двѣ плоскости AJE, AJF такъ, чтобъ радїусы GB, GC были имъ перпендикулярны; а именно радїусъ GB перпендикуляренъ плоскости AJE, а радїусъ GC, плоскости AJF. Къ симъ самымъ радїусамъ да будутъ опущены отъ точки D перпендикулярныя DH, DK.

Треугольники GJE, GDH будутъ подобные, по причинѣ линей JE, DH, перпендикулярныхъ къ GB; по той же причинѣ, треугольники GDK, GJF подобны. Слѣдовательно произойдутъ сїи двѣ пропорцїи:

GH : GE :: GD : GI.
и GK : GF :: GD : GI.

И такъ ради общаго содержанїя GD къ GJ, будетъ GH : GE :: GK : GF. Но GH есть косинусъ дуги BD (270); GE косинусъ дуги AB; GK косинусъ дуги CD; и GF косинусъ дуги AC; чего ради кос. BD : кос. AB :: кос. CD : кос. AC; или полагая третїй членъ на мѣстѣ втораго, а вторый на мѣстѣ третьяго:

кос. BD : кос. CD :: кос. AB : кос. AC.

358. Положивъ тоже, что и въ предъидущемъ предложенїи, будетъ сїя другая пропорцїя: синусъ BD, къ синусу CD, такъ какъ котангенсъ угла B, къ котангенсу угла C.

Поелику углы AEJ, AFJ равны угламъ B и C каждый каждому, такъ какъ мы видѣли въ доказательствѣ §. 349: чего ради, ибо треуголь-

ники AJE, AJF прямоугольные, углы EAJ, FAJ суть комплементы угловъ AEJ, AFJ; а посему и угловъ B и C.

Положивъ сїе, въ треугольникѣ AEJ будетъ (296), R : тан. EAJ или кот. B :: AJ : JE; и въ прямоугольномъ треугольникѣ AJF, тан. JAF или кот. C : R :: JF : AJ. И такъ (100) кот. C : кот. B :: JF : JE.

Но подобные треугольники GFJ, GKD, и также подобные треугольники GEJ, GHD, даютъ сїи пропорцїи:

JF : DK :: GJ : GD.
и JE : DH :: GJ : GD.
Слѣд. JF : DK :: JE : DH.
или JF : JE :: DK : DH.

И посему также кот. C : кот. B :: DK : DH; но DK и DH суть синусы отсѣковъ DC и DB; чего ради наконецъ кот. C : кот. B :: син. DC : син. DB.

359. Во всякомъ сферическомъ треугольникѣ ABC, ежели отъ одного изъ угловъ A опущена будетъ перпендикулярная дуга AD, на противулежащую сторону BC, будетъ сїя пропорцїя: тангенсъ половины стороны BC, къ тангенсу полусуммы двухъ прочихъ сторонъ, такъ какъ тангенсъ полуразности ихъ, къ тангенсу полуразности двухъ отсѣковъ CD, BD, или къ тангенсу ихъ полусуммы. фиг. 180. фиг. 181.

Доказано (357), что кос. AB : кос. AC :: кос. BD : кос. CD; чего ради (98) кос. AB + кос. AC : кос. AB — кос. AC :: кос. BD + кос. DC : кос. BD — кос. DC; но (287) кос. AB + кос. AC : кос. AB — кос. AC :: кот. $\frac{AC+AB}{2}$: тан. $\frac{AC-AB}{2}$; и по сей же причинѣ кос. BD + кос. CD : кос. BD — кос. CD :: кот. $\frac{CD+BD}{2}$: тан. $\frac{CD-BD}{2}$; слѣдовательно кот. $\frac{AC+AB}{2}$: тан. $\frac{AC-AB}{2}$ :: кот. $\frac{CD+BD}{2}$: тан. $\frac{CD-BD}{2}$; или кот. $\frac{AC+AB}{2}$: кот. $\frac{CD+BD}{2}$ :: тан. $\frac{AC-AB}{2}$: тан.

$\frac{CD-BD}{2}$; или понеже (280) котангенсы возвратно пропорцїональны тангенсам, тан. $\frac{CD+BD}{2}$ тан. $\frac{AC+AB}{2}$ :: тан. $\frac{AC-AB}{2}$: тан. $\frac{CD-BD}{2}$.

Но въ фигурѣ 180, CD+BD равны BC; а въ фигурѣ 181, CD—BD равна BC; слѣдовательно для фигуры 180, будетъ тан. $\frac{AB}{2}$: тан. $\frac{AC+AB}{2}$ :: тан. $\frac{AC-AB}{2}$: тан. $\frac{CD-BD}{2}$; а для фиг. 181, будетъ тан. $\frac{CD-BD}{2}$. тан. $\frac{AC+AB}{2}$ :: тан. $\frac{AC-AB}{2}$: тан. $\frac{BC}{2}$; или тан. $\frac{AB}{2}$: тан. $\frac{AC+AB}{2}$ :: тан. $\frac{AC-AB}{2}$: тан. $\frac{CD+BD}{2}$.

Рѣшенїе косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ.

360. Предложенныя предъ симъ начала, и вторая пропорцїя въ таблицѣ данной для прямоугольныхъ треугольниковъ, достаточны для рѣшенїя косвенноугольныхъ сферическихъ треугольниковъ, или по крайней мѣрѣ для опредѣленїя синусовъ или тангенсовъ различныхъ частей составляющихъ сїи треугольники. Много такихъ случаевъ, въ которыхъ три данныя могутъ опредѣлить все прочее; но есть много и такихъ, гдѣ вопросъ остается неопредѣленнымъ; ибо сїи данныя не могутъ ограничить, что искомая вещь больше или меньше 90°; однакоже, хотя вообще разсматривая, находимъ число сихъ послѣднихъ случаевъ довольно немалое, весьма рѣдко случается, въ обыкновенныхъ употребленїяхъ сферической Тригонометрїи, чтобъ не извѣстно было, какого вида должна быть искомая сторона, или искомый уголъ.

Прежде нежели приступимъ къ рѣшенїю треугольниковъ, напомнимъ, что синусъ, косинусъ, тангенсъ и котангенсъ угла или дуги, суть тѣже самые, какъ для сей дуги или угла, такъ и для супплементовъ ихъ.

361. Вычисленїе косвенноугольныхъ треугольниковъ, можно привести къ шести случаямъ, которыхъ рѣшенїе мы теперь покажемъ; а потомъ изъ оныхъ выведемъ рѣшенїе и прочихъ.

Вопросъ I. Даны двѣ стороны AB, AC, и одинъ противулежащїй уголъ B, сыскать уголъ противулежащїй другой данной сторонѣ. фиг. 180.

Сдѣлай сїю пропорцїю (349): син. AC : син. AB :: син. B : син. C. Уголъ можетъ быть больше или меньше 90°.

Вопросъ II. Даны двѣ стороны AB, AC, и одинъ противулежащїй уголъ B, сыскать третїю сторону BC. фиг. 180.

Отъ угла A, противулежащаго искомой сторонѣ, вообрази дугу AD ей перпендикулярную; и въ прямоугольномъ треугольникѣ ADB, вычисли отсѣкъ BD, по сей пропорцїи, которая подобна второй пропорцїи вышеприложенной таблицы:

кос. B : R :: кот. AB : кот. BD.

или лучше R : кос. B :: тан. AB : тан. BD.

Сїя пропорцїя таже что и первая; ибо (280) тангенсы возвратно пропорцїональны котангенсамъ.

А чтобы имѣть другой отсѣкъ CD, сдѣлай сїю пропорцїю (357):

кос. AB : кос. AC :: кос. BD : кос. CB.

Тогда, судя по тому, что AD падаетъ внутри треугольника, или внѣ его, будемъ имѣть BC, взявъ сумму или разность отсѣковъ BD и DC.

Вопросъ III. Даны два угла B и C, и одна противулежащая сторона AB, сыскать сторону BC прилежащую симъ угламъ. фиг. 180

Отъ угла A, противулежащаго искомой сторонѣ BC, вообрази дугу AD ей перпендикулярную; и въ прямоугольномъ треугольникѣ ADB. вычисли BD тою же пропорцїею, какая употреблена во II вопросѣ:

R : кос. B : : тан. AB : тан. BD.

Для другаго отсѣка CD сдѣлай сїю пропорцїю (358):

кош. B : кош. C : : син. BD : син. CD.

А чтобъ имѣть BC, возьми сумму или разность отсѣковъ CD и DB, судя по тому, что перпендикуляръ падаетъ внутри треугольника, или внѣ его.

Вопросъ IV. Изъ данныхъ двухъ сторонъ
фиг. 180. AB и BC, и угла B въ оныхъ содержимаго, находить третїю сторону AC.

Отъ одного изъ неизвѣстныхъ угловъ A, вообрази дугу AD, перпендикулярную противулежащей сторонѣ BC; вычисли отсѣкъ BD, тою же пропорцїею, какая была во II вопросѣ.

R : кос. B : : тан. AB : тан. BD.

Отними BD отъ извѣстной стороны BC (фиг. 180), или приложи оную къ сей сторонѣ (фиг 181), будешь имѣть отсѣкъ CD; потомъ для сысканїя AC, сдѣлай сїю пропорцїю (357): кос. BD : кос. CD : : кос. AB : кос. AC.

фиг. 180. Вопросъ V. Изъ данныхъ двухъ сторонъ AB, BC, и угла B содержимаго въ оныхъ, находить одинъ изъ двухъ прочихъ угловъ; на примѣръ уголъ C.

Отъ третьяго угла A, проведи дугу AD, перпендикулярную къ противулежащей сторонѣ BC; вычисли отсѣкъ BD, тою же пропорцїею, какъ и во II вопросѣ.

R : кос. B : : тан. AB : тан. BD.

Отними BD отъ извѣстной стороны BC (фиг. 180), или приложи оную къ сей сторонѣ

(фиг. 181) будешь имѣть отсѣкъ CD; а для угла C, сдѣлай сію пропорцію (358): син. BD : син. CD :: кош. B : кош. C.

Вопросъ VI. Изъ данныхъ трехъ сторонъ AB, AC, BC, находишь одинъ изъ угловъ; на примѣръ, уголъ B. фиг. 180.

Вообразивъ дугу AD перпендикулярную къ сторонѣ BC прилежащей искомому углу, вычисли полуразность двухъ отсѣковъ BD, DC, сею пропорціею (359): шан. $\frac{BC}{2}$: шан. $\frac{AB+AC}{2}$ :: шан. $\frac{AB-AC}{2}$: шан. $\frac{CD-BD}{2}$. Нашедъ полуразность, вычши оную изъ половины BC; будешь имѣть (301) меньшій отсѣкъ BD; тогда, чтобъ имѣть уголъ B, сдѣлай сію пропорцію, которая всегда таже, что и во II вопросѣ, но здѣсь превращена:

шан. AB : шан. BD : R : кос. B.

Ежели перпендикулярная должна упасть внѣ треугольника, первая пропорція вмѣсто полуразности покажетъ полусумму: чего ради должно тогда для меньшаго отсѣка BD, вычесть половину BC изъ сей полусуммы, ибо въ такомъ случаѣ BC есть разность двухъ отсѣковъ. фиг. 181.

Можно еще рѣшить сей вопросъ правиломъ подобнымъ показанному для такого же случая, въ прямолинѣйныхъ треугольникахъ. Сіе правило есть слѣдующее:

Возми полусумму трехъ сторонъ, изъ сей полусуммы вычши порознь каждую изъ двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ; отъ чего произойдутъ два остатка.

Тогда къ двойному логариѳму радіуса, приложи логариѳмы синусовъ сихъ двухъ остатковъ, и изъ цѣлаго вычши сумму логариѳмовъ синусовъ двухъ сторонъ содержащихъ искомый уголъ; остатокъ будетъ логариѳмъ квадрата синуса

половины сего угла. Возьми половину сего остальнаго логариөма; и ищи какому числу градусовЪ и минутЪ она соотвѢтствуетЪ вЪ таблицахЪ; сїе самое будетЪ половина требуемаго угла.

Доказательство на сїе правило, равно какЪ и на показанное (304) для прямолинѢйнаго треугольника, дадимЪ вЪ третьей части.

362. ИзЪ предложенныхЪ шести случаевЪ можно вывесть другїе шесть.

ВопросЪ VII. ИзЪ данныхЪ двухЪ угловЪ F

фиг. 182. и G, и одной противулежащей стороны GE, находить сторону EF, противулежащую другому извѢстному углу G.

Вообразивъ супплементный треугольникЪ ABC, и взявЪ супплементы угловЪ G и F, и стороны GE, будешь имѢть (336) стороны AC, AB, и уголЪ B; итакЪ вычисля уголЪ C, по первому вопросу, супплементЪ его будетЪ сторона EF. (336).

ВпрочемЪ сїе рѢшенїе даемЪ мы единственно для сохраненїя подобїя сЪ слѢдующими случаями; ибо сей вопросЪ рѢшится непосредственно показаннымЪ предложенїемЪ (349), дѢлая сїю пропорцїю: син. F : син. GE :: син. G : син. FE.

фиг. 182. ВопросЪ VIII. ИзЪ двухЪ угловЪ F и G, и одной противулежащей стороны GE, находить третїй уголЪ E.

ВзявЪ супплементы трехЪ данныхЪ, извѢстны будутЪ вЪ супплементномЪ треугольникѢ стороны AC, AB, и уголЪ B. Вычисли сторону BC по II вопросу: супплементЪ сей стороны будетЪ величина угла E (336).

ВопросЪ IX. ИзЪ двухЪ сторонЪ EG, EF, и

фиг. 182. одного противулежащаго угла G, находить уголЪ E, содержимый вЪ двухЪ данныхЪ сторонахЪ.

ВзявЪ супплементы трехЪ данныхЪ, извѢстны будутЪ вЪ супплементномЪ треугольникѢ

АВС, уголъ в, уголъ с и сторона ав. Вычисли сторону вс по III вопросу; суплементъ оной будетъ величина угла е (336).

Вопросъ X. Изъ двухъ угловъ g и е, и стороны имъ прилежащей ge, находить третій уголъ f. фиг. 182.

Взявъ суплементы трехъ данныхъ, извѣстны будутъ въ суплементномъ треугольникѣ авс, стороны ав, вс, и содержимый уголъ в. Вычисли сторону ас по IV вопросу; суплементъ оной будетъ искомый уголъ f (336).

Вопросъ XI. Изъ двухъ угловъ g и е, и стороны имъ прилежащей ge, находить одну изъ двухъ прочихъ сторонъ; напримѣръ fe. фиг. 182.

Взявъ суплементы трехъ данныхъ, извѣстны будутъ въ суплементномъ треугольникѣ авс, стороны ав, вс, и уголъ въ нихъ содержимый в. Вычисли уголъ с. по V вопросу: суплементъ его будетъ величина стороны fe (336).

Вопросъ XII. Изъ данныхъ трехъ угловъ е, f, g, находить одну изъ сторонъ; на примѣръ сторону eg. фиг. 182.

Взявъ суплементы трехъ данныхъ, извѣстны будутъ въ суплементномъ треугольникѣ а в с, три стороны вс, ас, ав. Вычисли уголъ в, по VI вопросу; суплементъ угла в будетъ величина искомой стороны eg (336).

Не приступая къ примѣрамъ, примѣтимъ, что хотя многіе случаи косвенноугольныхъ треугольниковъ требуютъ двухъ пропорцій; однакожъ находятся нѣкоторые косвенноугольные треугольники, которые могутъ всегда рѣшимы быть одною только пропорціею. Таковы суть тѣ, которыхъ одна изъ сторонъ 90°; ибо взявъ суплементный треугольникъ, будетъ онъ прямоугольный. Сферической треугольникъ, имѣющій одну изъ сторонъ равную 90°, называется квадрантальный (четвертный) треугольникъ.

Предложимъ теперь нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ вопроса IV. Положимъ, что точка F означаетъ положенїе Парижа на землѣ; точка фиг. 166. G положенїе Тулона. Извѣстно по наблюденїямъ астрономическимъ, что широта Парижа, или дуга BF равна 48°, 50′, а широта Тулона, или дуга GE равна 43°, 07′; и что разность долготы между Парижемъ и Тулономъ, или дуга BE, или уголъ BAE или FAG есть 3°. 37′. Спрашивается, какое есть самое кратчайшее разстоянїе между Парижемъ и Тулономъ?

Самый кратчайшїй путь на поверхности шара отъ одной точки до другой, есть дуга великаго круга, проходящаго чрезъ сїи точки. Вообрази дугу FG великаго круга. Понеже каждая изъ дугъ AB, AE есть 90°, то вычтя изъ оныхъ дуги BF, GE, изъ которыхъ одна 48°, 50′, а другая 43°, 07′; найдутся дуги AF, AG, одна 41°, 10′, а другая 46°, 53′. Чего ради узнавъ въ треугольникѣ AFG, двѣ стороны AF, AG, и содержимый уголъ FAG, остается вычислить третїю сторону FG.

Изобразимъ треугольникъ FAG треугольни- фиг. 183. комъ ABC, и положимъ, что AB 41°, 10′, BC 46°, 53′, и уголъ B 3°, 37′. Итакъ по правилу показанному въ IV вопросѣ вычисляю отсѣкъ BD, сею пропорцїею:

R : кос. 3°, 37′ :: тан. 41°, 10′ : тан. BD.

Дѣлая по логариѳмамъ, имѣю:

лог. кос. 3°, 37′	- - - -	9. 9991342
лог. тан. 41°, 10′	- - -	9, 9417135
Сумма	- - - - - -	19, 9408477.
Лог. рад.	- - - - - -	1 . . . .
Остатокъ или лог. тан. BD	-	9, 9408477.

Сей логариѳмъ соотвѣтствуетъ въ таблицахъ 41°, 07′; вычтя 41°. 07′ изъ BC, то есть изъ 46°, 53′, останется 5°, 46′ для отсѣка CD.

Чтобъ сыскать сторону АС, дѣлаю сходственно предписанному въ IV вопросѣ, сїю пропорцїю:

кос. $41^{\circ}, 07'$: кос. $5^{\circ}, 46'$: : кос. $41^{\circ}. 10'$: кос: АС.

Дѣлая по логариѳмамъ, имѣю:

лог. кос. $41^{\circ}. 10'$	- - - - -	9, 8766785
лог. кос. $5^{\circ}. 46'$	. - - - -	9, 9977966
ариѳ. допол. лог. кос. $41^{\circ}, 07'$	-	0, 1229904
Сумма или лог. кос. АС	-	19, 9974655.

Откуду по таблицамъ заключаю, что АС равна $6^{\circ}. 11'$, сїе количество, щитая по 20 лигъ въ градусѣ, равно около 124 большимъ лигамъ; но среднихъ лигъ, которыхъ 25 въ градусѣ, приходитъ около 154.

Примѣръ VI вопроса. Говоря о способѣ снимать планы, мы сказали (138), что дадимъ средство приводить на горизонтальную плоскость углы, которые наблюдаемы были выше или ниже сея плоскости. Оное средство здѣсь предлагаемъ.

Да будутъ А, В, С три точки различно возвышенныя надъ горизонтальною плоскостїю И К, фиг. 184.
и да будутъ прямыя В b, А а, С с, перпендикулярныя къ сей плоскости, получимъ треугольникъ а b с, коего вершины угловъ точки а, b, с, представляютъ предметы А, В, С; такъ какъ они должны быть представлены на картѣ.

Полагая, что изъ точки А можно наблюдать двѣ точки В и С, спрашивается, что должно сдѣлать, дабы опредѣлить уголъ а.

Должно измѣрить изъ точки А уголъ В А С и углы В А а, С А а; перьвый можетъ быть измѣренъ безъ всякой трудности; въ разсужденїи каждаго изъ двухъ прочихъ, на примѣръ въ разсужденїи угла В А а, должно расположить инструментъ на вертикальной плоскости воображаемой чрезъ прямую АВ, и поставя одинъ изъ дїаметровъ горизонтально, посредствомъ отвѣса, которой тогда

означитъ прямую Aa, должно направить другой діаметръ къ точкѣ B; тогда увидимъ на инструментѣ сколько градусовъ между отвѣсомъ и діаметромъ направленнымъ къ точкѣ B; что покажетъ величину угла BAa. Такимъ же образомъ найдется и уголъ CAa.

Положивъ сіе, ежели представить, что какимъ нибудь радіусомъ AD и точкою A, какъ центромъ, написаны дуги DF, DG, GF, на плоскостяхъ угловъ BAC, BAa, CAa; то составится сферическій треугольникъ DGF, въ которомъ извѣстны будутъ стороны DF, DG, GF, мѣры угловъ BAC, BAa, CAa, кои были наблюдаемы; уголъ DGF сего треугольника равенъ будетъ углу bac, поелику двѣ прямыя ba, ac будучи перпендикулярны пересѣченію Aa двухъ плоскостей Ab, Ac, дѣлаютъ тотъ же уголъ, что и сіи плоскости; чего ради (320) сей уголъ равенъ сферическому углу DGF.

Положимъ же, что сіи углы BAC, DAa, CAa по измѣренію найдены, перьвой 82°, 10′, второй 77°, 42′, третій 74°, 24′; остается теперь вычислить уголъ B, противулежащій сторонѣ AC, которая равна 82°, 10′ въ сферическомъ треугольникѣ ABC, коего три стороны AB, AC, BC, суть по порядку 74°, 24′, 82°, 10′, 77°, 42′. Чего ради согласуясь съ тѣмъ, что сказано было въ VI вопросѣ, вычисляю полуразность двухъ отсѣковъ BD и CD, сею пропорціею: тан. $\frac{BC}{2}$: тан. $\frac{AC+AB}{2}$ :: тан. $\frac{AC-AB}{2}$: тан. $\frac{CD-DB}{2}$; то есть, тан. 38°, 51′ : тан. 78°, 17′ :: тан. 3°, 53′ : тан. $\frac{CD-DB}{2}$.

ДѢлая по логариѳмамъ, имѣю:

лог. шан. 3°. 53′ - - -	8, 8317478
лог. шан. 78°. 17′ - - -	10, 6832050
ариѳ. допол. лог. шан. 38°. 51′ -	0, 0939569
Сумма или лог. шан. $\frac{CD-DB}{2}$	~~1~~9, 6089097

Который соотвѣтствуетъ 22°. 07′.

Вычтя 22°. 07′ полуразность изъ половины вс, т. е. изъ 38°. 51′; получимъ (301) меньшій отсѣкъ вд 16°. 44′. Потомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ адв, чтобъ имѣть уголъ в, дѣлаю въ сходственность сказанному въ VI вопросѣ, сію пропорцію:

шан. ав: шан. вд :: R: кос. в; то есть,
шан. 74°. 24′ : шан. 16°. 44′ :: R : кос. в.

ДѢлая по логариѳмамъ, имѣю:

лог. шан. 16°. 44′ - - -	9, 4780592
лог. рад. - - - - - -	1 . . . .
ариѳ. допол. лог. шан. 74°. 24′ -	89, 4459232
Сумма или лог. кос. в - -	~~1~~08, 9239824

Сей логариѳмъ въ таблицахъ соотвѣтствуетъ углу 4°. 48′, коего комплементъ 85°. 12′ есть величина угла в, то есть угла вас. фиг. 184

Дабы привесть уголъ с къ углу с, должно сдѣлать подобное вычисленіе, полагая, что наблюдаемы были углы, асв, асс, и всс.

Что касается до третьяго угла в, не нужно его вычислять; ибо въ прямолинѣйномъ треугольникѣ авс три угла равны двумъ прямымъ.

ПримѢчаніе.

Полагая всегда, что каждая часть сферическаго треугольника не больше 180°; можно ограничивать довольно простымъ правиломъ, ежели искомое должно быть меньше или больше 90°, или ежели неопредѣленно можетъ быть и больше и меньше 90°. Вотъ сіе правило:

Ежели четвертый членЪ пропорцїи, которую должно сдѣлать для рѣшенїя сферическаго треугольника, есть синусЪ: дуга, кЪ которой онЪ будетЪ принадлежать, можетЪ быть и меньше и больше 90°, исключая случаи, когда треугольникЪ будетЪ прямоугольный, и изЪ трехЪ извѣстныхЪ частей одна противулежитЪ искомой; вЪ такомЪ случаѣ, (344) сїи два послѣднїя количества всегда между собою одинаки.

Но ежели четвертый членЪ есть косинусЪ, или котангенсЪ, или тангенсЪ; то вЪ разсужденїи извѣстныхЪ членовЪ пропорцїи, наблюдай слѣдующее правило: дай знакЪ + радїусу и всѣмЪ синусамЪ, хотя бы дуги, кЪ которымЪ они принадлежатЪ, были больше или меньше 90°. Дай равномѣрно знакЪ + всѣмЪ косинусамЪ, тангенсамЪ и котангенсамЪ дугЪ меньшихЪ 90°; и на противЪ дай знакЪ — всѣмЪ косинусамЪ, тангенсамЪ и котангенсамЪ дугЪ большихЪ 90°: тогда, ежели число знаковЪ — есть 0, или четное, дуга соотвѣтствующая четвертому члену, будетЪ всегда меньше 90°; на противЪ же сего она будетЪ больше 90°, ежели число знаковЪ — есть не четное.

Сїе правило основано, 1 е, на правилѣ умноженїя и дѣленїя количествЪ разсуждаемыхЪ по ихЪ знакамЪ, что увидимЪ вЪ Алгебрѣ; 2 е, на томЪ, что примѣчено (273 и вЪ послѣд.) относительно кЪ синусамЪ, косинусамЪ и проч. дугЪ меньшихЪ или большихЪ 90°.

Прибавленїе отъ переводчиковъ.

Въ дополненїе сказаннаго сочинителемъ о рѣшенїи сферическихъ треугольниковъ, присовокупимъ:

I. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ не нужны пропорцїи для рѣшенїя сферическихъ треугольниковъ; а именно, когда сферической треугольникъ имѣетъ два или три угла прямые; ибо стороны противулежащїя симъ угламъ будутъ по 90° (344); третїя же сторона будетъ того же числа градусовъ, что и уголъ ей противулежащїй (328). Также, когда сферической треугольникъ имѣетъ двѣ или три стороны по 90°; то углы противулежащїе симъ сторонамъ будутъ прямые, а третїй уголъ тогоже числа градусовъ, что и сопротивная ему сторона. Наконецъ, когда сферической треугольникъ имѣетъ одну сторону 90°, и одинъ уголъ прямой; тогда есть въ немъ и другая сторона 90°, и другой уголъ прямой; третїя же сторона будетъ того же числа градусовъ, что и уголъ ей противулежащїй.

II. Косвенноугольные сферическїе треугольники, имѣющїе всѣ три стороны, или всѣ три угла взаимно равные; или у которыхъ двѣ стороны или два угла равны; легче рѣшатся посредствомъ прямоугольныхъ треугольниковъ, естьли отъ третьяго угла къ третьей сторонѣ опущена будетъ перпендикулярная дуга, которая сїю сторону и сей уголъ разсѣчетъ по поламъ.

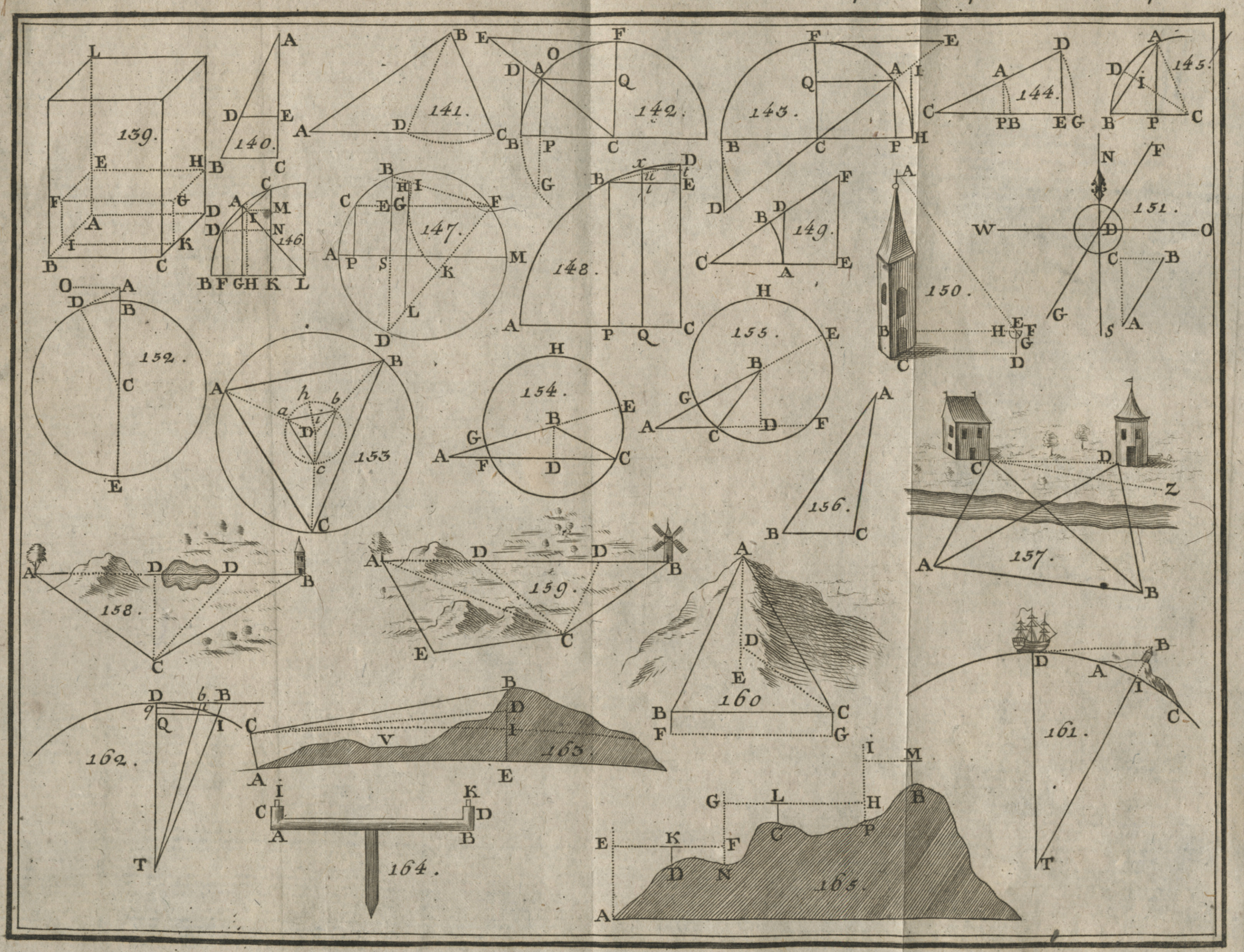
III. Косвенноугольные сферическїе треугольники, въ коихъ двѣ стороны, или два угла вмѣстѣ равны 180°, рѣшатся посредствомъ показанныхъ предъ симъ равнобедренныхъ треугольниковъ. Ибо естьли одна изъ тѣхъ двухъ сторонъ и также третїя сторона будутъ продолжены, пока

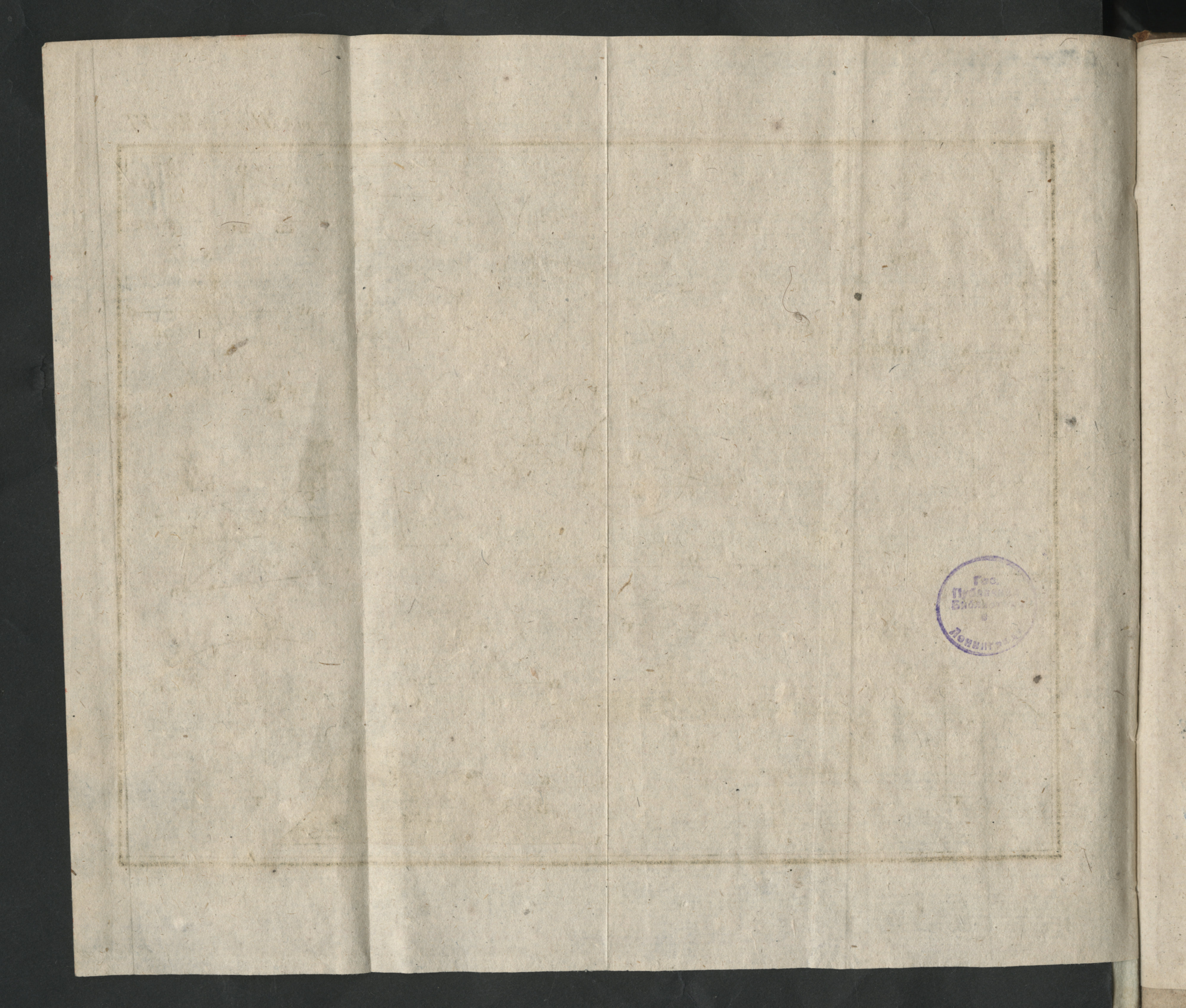
вторично встрѣтятся, то составится новой треугольникъ, въ которомъ или двѣ стороны, или два угла будутъ взаимно равны; чего ради разрѣшая сей треугольникъ, разрѣшится и первой.

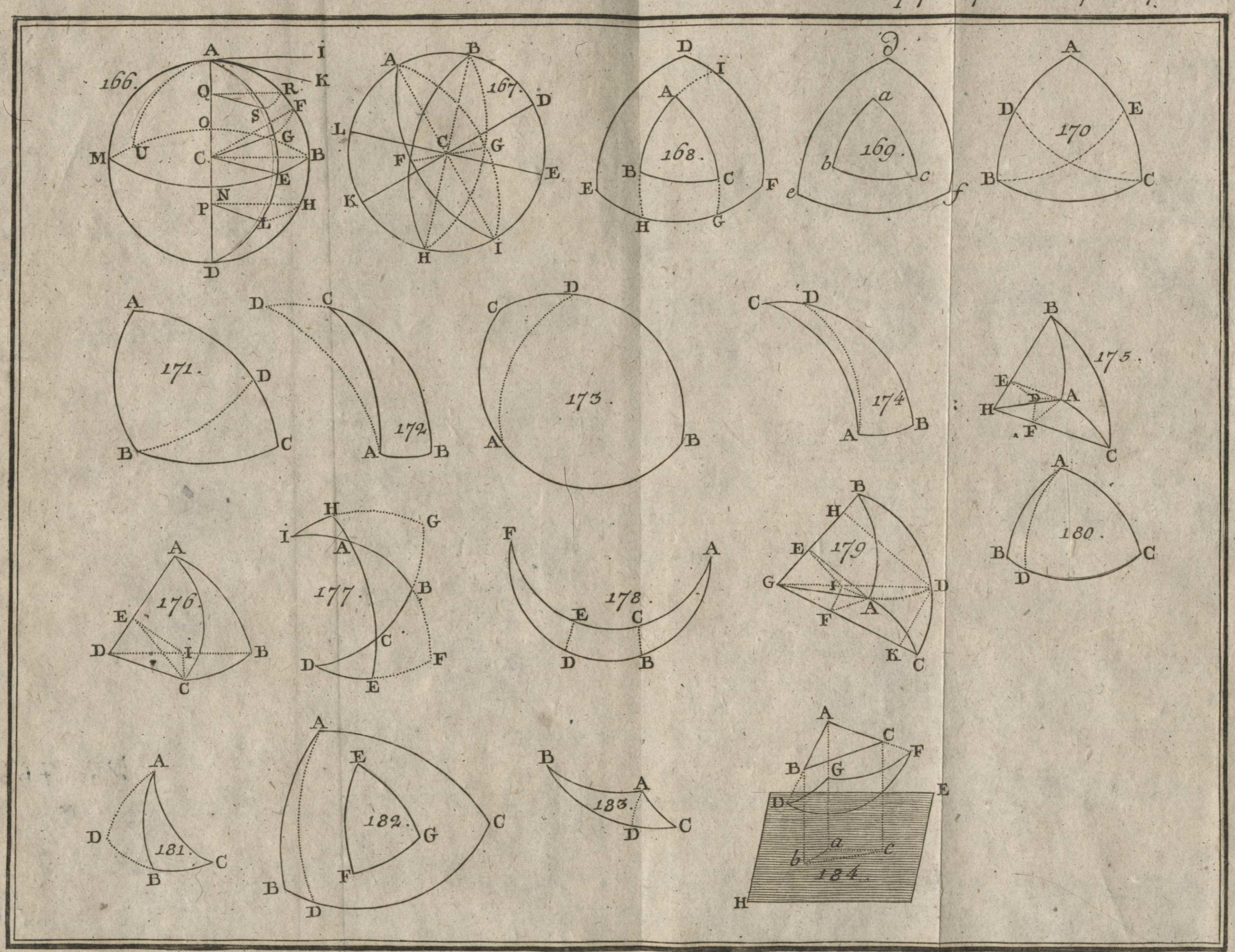
Здѣсь примѣтимъ, что ежели двѣ стороны сферическаго треугольника равны 180°, то и два угла имъ противулежащіе будутъ равны 180°; и обратно. Ибо ежели $AD+DB=$
г. 173. 180°, есть же $CDB=180^\circ$ (323), посему $AD=CD$; и такъ уголъ $DAC=DCA$ (341) или DBA; чего ради углы $DBA+DAB=$ угламъ $DAC+DAB$, то есть равны 180°. Обратное такимъ же образомъ докажется. Подобно доказать можно, что ежели двѣ стороны сферическаго треугольника больше или меньше 180°, два угла имъ противулежащіе будутъ больше или меньше 180°, и обратно.

КОНЕЦЪ.




139.
140.
141.
142.
143.
144.
145.
146
147.
148.
149.
150.
151.
152.
153
154.
155.
156.
157.
158.
159.
160
161.
162.
163.
164.
165.


Гос.


166.
167.
168.
169.
170
171.
172
173.
174
175.
176.
177.
178.
179
180.
181.
182.
183.
184.